RAFAEL ESCUDERO TRUJILLO

CARLOS ROJAS ÁLVAREZ

MATEMÁTICAS BÁSICAS

2ª edición REVISADA

ediciones de la U

EDICIONES UNINORTE

MATEMÁTICAS BÁSICAS

2ª edición revisada

MATEMÁTICAS BÁSICAS

2ª edición revisada

Rafael Escudero Trujillo
Carlos Rojas Álvarez

ediciones de la U

Ediciones Uninorte

Barranquilla, Colombia
2010

Escudero Trujillo, Rafael.
Matemáticas básicas / Rafael Escudero Trujillo, Carlos Rojas Álvarez. –
Barranquilla : Ediciones Uninorte, 2010.
viii, 238 p.

ISBN: 978-958-741-089-1

Matemáticas. I. Rojas Álvarez, Carlos. II. Tít.
510 E74ma – 22 ed.

www.uninorte.edu.co
Km 5 vía a Puerto Colombia, A.A. 1569,
Barranquilla (Colombia)

http://edicionesdelau.com/
Calle 24A n.° 43-22
Bogotá (Colombia)

Primera edición, junio de 2008
Primera reimpresión, agosto de 2009
Segunda reimpresión, diciembre de 2009
Segunda edición revisada, diciembre de 2010

Cordinación editorial
Zoila Sotomayor O.

Diagramación
Munir Kharfan De los Reyes

Diseño de portada
Joaquín Camargo Valle

Corrección de textos
Mercedes Castilla

Impreso y hecho en Colombia
Javegraf
Bogotá
Printed and made in Colombia

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Este libro de Matemáticas Básicas tiene el propósito de aplicar la mayoría de los temas estudiados a la vida real. La publicación es un texto y cuaderno de trabajo a la vez, e incluye talleres que orientan al alumno hacia la previa resolución de problemas para que se vaya acercando paulatinamente al conocimiento de cada tema con la guía del profesor.

La obra está dirigida sobre todo a aquel estudiante que necesita desarrollar un pensamiento cuantitativo a partir de una matemática básica y la ejecución de los talleres implica el despliegue de actividades individuales y grupales.

El contenido de cada unidad es como sigue:

Unidad 1: **Lógica.** Esta unidad contiene conceptos básicos de la lógica matemática: proposición, los conectivos lógicos, las derivadas y variantes de un condicional, el uso y análisis de diagramas de Venn y el proceso inductivo. Además, la unidad contiene anexos con ejercicios especiales de aplicación y una bibliografía para complementar el estudio de los temas.

Unidad 2: **Sistemas numéricos.** En esta unidad se estudia el concepto de sistema matemático y sistema numérico para luego estudiar los números naturales, enteros, racionales, reales y sus respectivas propiedades. Finalmente, se proponen ejercicios y problemas de aplicación sobre las propiedades de los sistemas numéricos y bibliografía de complemento.

Unidad 3: **Funciones.** Esta unidad estudia la función lineal, las funciones polinomiales, ecuaciones lineales, diferentes formas de expresar una función, acertijos, problemas de aplicación y contiene bibliografía complementaria.

Unidad 4: **Variación.** En esta unidad se estudia el concepto de variación directa, inversa, múltiple y exponencial. Cada concepto se ilustra gráficos y problemas de aplicación a la vida real. Al final se proponen problemas de aplicación y acertijos.

Metodología

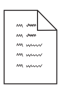
La metodología de cada unidad consiste en la formulación de un problema para acercarse a la teoría. Seguidamente, se proponen ejercicios, problemas de aplicación, y acertijos.

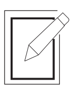
Íconos

El texto contiene los siguientes íconos y a su derecha se escriben sus respectivos significados:


Problema que se plantea al inicio de cada sección.

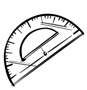

Advertencia de no avanzar hasta que haya respondido las preguntas formuladas.


Teoría correspondiente a una sección.


Aplicaciones de conceptos de una sección.


Acertijos


Dibujo que se debe hacer con una regla o escuadra.


Medida que debe hacer con un transportador.


Indica el final de los ejercicios o aplicaciones de una sección.

Unidad 1
LÓGICA

Contenido

1.1 PROPOSICIONES

Problema

Escriba al lado de cada oración, en el paréntesis de la derecha, una V si la oración es verdadera o una F si es falsa cuando esto sea posible.

1. ¿Qué día es hoy? ________________________ ( )
2. Sócrates es un filósofo de la Edad Moderna ________ ( )
3. Platón escribió *La República* ____________________ ( )
4. ¡Eureka! ________________________________ ( )
5. El Cairo es la capital de Egipto ________________ ( )
6. No deseo dormir ahora _______________________ ( )
7. H_2SO_4 es la fórmula química del ácido sulfúrico ______ ( )
8. Cierre la puerta ___________________________ ( )
9. La araña es un crustáceo _____________________ ( )
10. Un heptágono es un polígono de cinco lados _______ ( )
11. Mármol es una palabra grave __________________ ( )
12. Quiero estudiar Psicología ___________________ ( )
13. La Luna es una estrella _____________________ ( )
14. ¡Hola! _________________________________ ( )
15. Plátano es una palabra aguda. __________________ ( )
16. Cómo funciona una nevera? ___________________ ( )
17. Quizás no estudie lo suficiente ________________ ( )
18. π es un número racional _____________________ ( )
19. La onda transporta energía ___________________ ( )
20. La velocidad es una cantidad vectorial ____________ ( )

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué en algunas oraciones pudo determinar si la oración era verdadera o falsa y en otras no?

R/____

____

______________.

2. ¿Qué tienen en **común** todas las oraciones en las que pudo determinar su valor de verdad?

R/____

____

________________.

3. Ahora, **clasifique** las oraciones en las que no pudo determinar su valor de verdad, escribiendo en el espacio libre el nombre correspondiente.

> **No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.**

Teoría

Definición: 1

> Una **oración** es un conjunto de palabras que expresa un pensamiento completo. También se define como la menor unidad del habla con sentido completo.

La persona que habla toma diferentes actitudes según lo que anhela expresar, y el sentido completo de lo que se dice, da origen a una oración distinta. Según la actitud del hablante, las oraciones se clasifican en:

- 1**Enunciativas**, si enunciamos
- 1**Desiderativas**, si deseamos

- **Imperativas**, si ordenamos
- **Interrogativas**, si interrogamos
- **Exclamativas**, si exclamamos
- **Dubitativas**, si dudamos

Definición:

Una **proposición cerrada** o **proposición** es una oración de la que se puede decir si es verdadera o falsa. Todas las proposiciones son oraciones enunciativas o declarativas.

Las proposiciones se simbolizan con letras minúsculas tales como *p*, *q*, *r*, *s t*, etc.

Por ejemplo, la proposición *hoy es martes* se puede simbolizar con *p*.

Ejercicios 1.1

Escriba diez (10) proposiciones y determine el valor de verdad de cada una.

1.2 LA NEGACIÓN

? Problema

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
Colombia es un país suramericano. ( )
Colombia no es un país suramericano. ( )

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué relación hay entre el valor de verdad de las dos proposiciones anteriores?
R/____
____________________.

2. ¿Qué diferencia hay entre las dos proposiciones?
R/____
______________________________________.

> **No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.**

Teoría

Definición:

> Sea p una proposición. La proposición *no* p, simbolizada por $\sim p$, es verdadera cuando p es falsa, y falsa cuando p es verdadera.

Para organizar la información anterior, se utiliza una tabla que se denomina **tabla de verdad:**

p	$\sim p$
V	F
F	V

En la tabla de verdad de la **negación** podemos ver más fácilmente que la **negación** de una proposición verdadera es falsa y que la negación de una proposición falsa es una proposición verdadera.

Ejemplo 1.2.1

La negación de la proposición *"la presión atmosférica disminuye con la altura"*, es *"la presión atmosférica no disminuye con la altura"*. La primera proposición es verdadera; por lo tanto, la segunda, que es su negación, es falsa.

Definición

Una **proposición abierta** es un enunciado que contiene una variable x y cuando x se reemplaza por un objeto, se convierte en una proposición cerrada.

Ejemplo 1.2.2

Los siguientes enunciados son proposiciones abiertas:

a. x es par. Es verdadera cuando se reemplaza x por 2 y es falsa, si se reemplaza por 5.

b. x es un animal vertebrado. Es verdadera cuando se reemplaza x por *vaca* y es falsa, si se reemplaza por *estrella de mar.*

c. $x + 3 = 8$. Es verdadera si $x = 5$ y es falsa para los demás valores de x, o sea, si $x \neq 5$.

Las proposiciones se diagraman en los denominados **círculos de Euler** o **diagramas de Venn.**

Ejemplo 1.2.3

La proposición abierta *"x es un animal vertebrado"* es verdadera cuando se reemplaza la variable x por un animal vertebrado, como el pato; y es falsa cuando se reemplaza la x por un animal invertebrado, como el erizo. **La figura 1** muestra el diagrama de Venn.

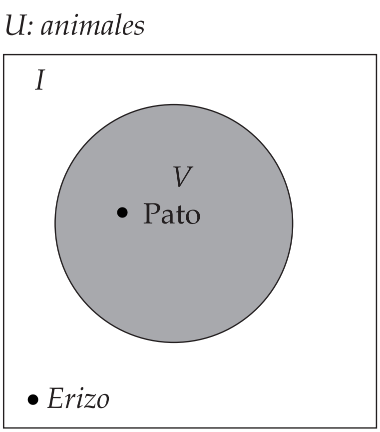


Figura 1

La región gris es el conjunto de los Vertebrados (V) y la región en blanco es el conjunto de los Invertebrados (I). Pato y erizo son elementos respectivamente. *U:* conjunto universal.

Ejercicios 1.2

Escriba la negación de las proposiciones 1-10 y determine si son verdaderas o falsas:

1. La Luna es un satélite de Marte.
2. El número 798 es divisible entre 3.

3. El 48 es un número deficiente.
4. El húmero queda en las extremidades superiores.
5. La palabra *avión* no es aguda.
6. El hexágono tiene seis lados.
7. El número 652 es divisible entre 4.
8. El dólar es la moneda de Gran Bretaña.
9. El 36 es número abundante.
10. Los lagos no tienen agua dulce.
11. Escriba cinco proposiciones, determine su valor de verdad, escriba la negación correspondiente y determine su respectivo valor de verdad.

En los ejercicios 12-15, reemplace la variable x por un objeto para que la proposición sea verdadera y luego por otro objeto para sea falsa. Haga un diagrama especificando el conjunto universal en cada caso.

12. x es un número par.
13. x es un triángulo.
14. x es un mamífero.
15. x es una palabra aguda.
16. ¿Qué relación hay entre la definición del complemento de un conjunto A y la negación? Para llegar a la respuesta, llene la siguiente tabla de acuerdo a la figura 2.

$x \in A$	$x \notin A$
V	
F	

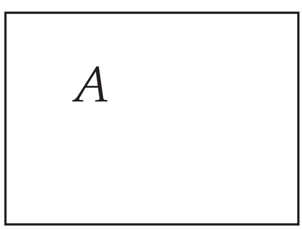


Figura 2

1.3 Conectivos lógicos

Problema

Simbolice las siguientes proposiciones utilizando las abreviaturas sugeridas:

1. La Luna es un satélite (*p*) y el Sol es una estrella (*s*).
R/ ____.

2. El cangrejo es un miriápodo (*q*) o 1+2=3 (*t*).
R/ ____.

3. Si *x-6=8* (*t*) entonces *x=14* (*s*).
R/ ____.

4. O estoy vivo (r) o estoy muerto (*p*).
R/ ____.

> **No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.**

Teoría

Definición: 1

> Sean p, q dos proposiciones. Los **conectivos lógicos** *y*, *o*, *si… entonces* se utilizan para unir las proposiciones p, q, y obtener así las siguientes proposiciones compuestas:

Nombre del conectivo	**Símbolo**	**Proposición compuesta**
Conjunción (*y*)	$\wedge$	$p \wedge q$
Disyunción inclusiva (*o*)	$\vee$	$p \vee q$
Disyunción exclusiva (*o u o*)	$\underline{\vee}$	$p \underline{\vee} q$
Condicional (*si… entonces*)	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$

Así como una proposición cerrada o abierta se diagraman con los círculos de Euler, también las proposiciones compuestas se pueden diagramar. Cuando se tienen dos conjuntos *A* y *B*, el conjunto universal *U* se divide en cuatro regiones, a saber **(figura 3)**:

- La región 1: $A' \cap B'$, formada por los elementos que no están ni en el conjunto *A* ni en el conjunto *B*.
- La región 2: $A - B$, formada por los elementos del conjunto universal que están en *A* pero que no están en *B*.
- La región 3: $A \cap B$, formada por los elementos que están en *A* y *B*.
- La región 4: $B - A$, formada por los elementos del conjunto universal que están en *B* pero que no están en *A*.

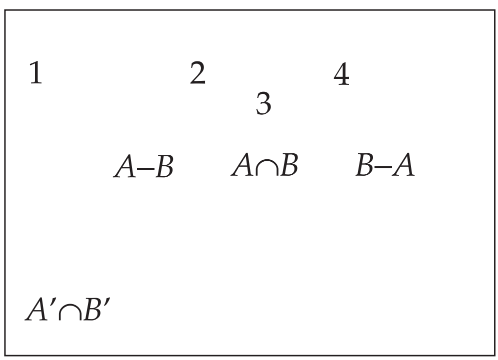


Figura 3

El siguiente ejemplo nos muestra cómo se utilizan las distintas regiones:

Ejemplo 2.2.1

Sea *U* el conjunto de los números naturales y la proposición *x es un número par y x< 10*. ¿Para qué valores de *x* la proposición es verdadera? ¿Y falsa? Dibuje el diagrama de Venn correspondiente.

Solución:

La proposición es compuesta con el conectivo lógico de la conjunción *y* (∧).

Sea *p: x es un número par* y *q: x es un número menor que 10.*

Los valores de *x* que hacen verdadera la proposición $p \wedge q$ son {2, 4, 6, 8} y los que la hacen falsa serán los demás números naturales distintos al conjunto mencionado.

El diagrama de Venn es la **figura 4:**

U: números naturales

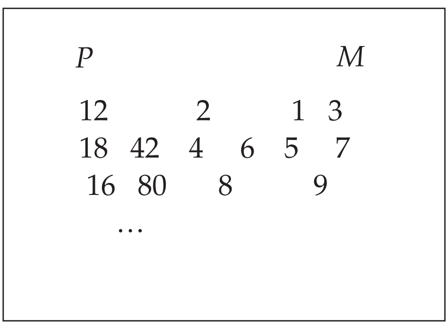


Figura 4

Donde *P* es el conjunto de los números pares.

M, el conjunto de los números naturales menores que 10.

Se puede hacer una correspondencia de los círculos de Euler con una tabla de verdad:

$x \in P$	$x \in M$	$x \in P \cap M$	**Región**	p	q	$p \wedge q$
V	V	V	3	V	V	V
V	F	F	2	V	F	F
F	V	F	4	F	V	F
F	F	F	1	F	F	F

Observemos que las tablas coinciden. ¿Qué números irán en la región 1?

____

Cuando los subconjuntos que conforman el conjunto universal son disjuntos dos a dos, esto es, que no tienen elementos en común, decimos que el conjunto se descompone en una *partición.* Intuitivamente, una partición de un conjunto A es una familia de subconjuntos de A (denominados *miembros)* que son disjuntos dos a dos y cuya unión es el conjunto A. **(Figura 5)**

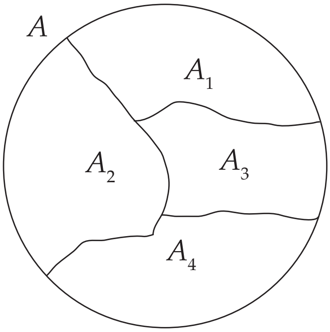


Figura 5

En la **figura 5** el conjunto A se descompone en una partición, en la cual los subconjuntos A_1, A_2, A_3 y A_4, son disjuntos dos a dos y su unión conforma el conjunto A. El número de miembros de una partición varía de dos en adelante.

El siguiente ejemplo muestra una aplicación:

Ejemplo 2.2.2

Sea U el conjunto de las letras del alfabeto y la proposición, *una letra* b *es una vocal o es una consonante*. ¿Para qué letras del alfabeto la proposición es verdadera? ¿Y falsa? Dibuje los círculos de Euler correspondientes.

Solución:

La proposición es compuesta con el conectivo lógico de la disyunción exclusiva *o … o* ($\underline{\vee}$).

Sea *p: la letra es una vocal* y *q: la letra es una consonante.*

Una letra del alfabeto no puede ser vocal y consonante al mismo tiempo, debe ser una de las dos. Por lo tanto, la proposición $p \underline{\vee} q$ es verdadera si la letra es o vocal o consonante; y falsa, en los demás casos. Por lo tanto, los círculos de Euler se muestran en la **figura 6.**

U: letras del alfabeto

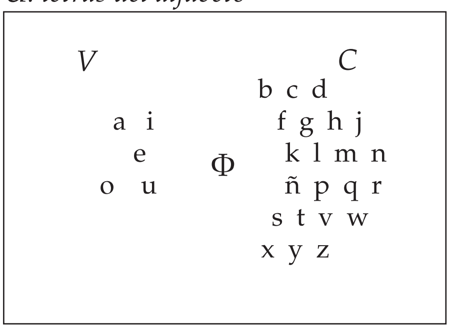


Figura 6

Donde *V:* el conjunto de las vocales.

C: el conjunto de las consonantes.

Se puede hacer una correspondencia de los círculos de Euler con una tabla de verdad:

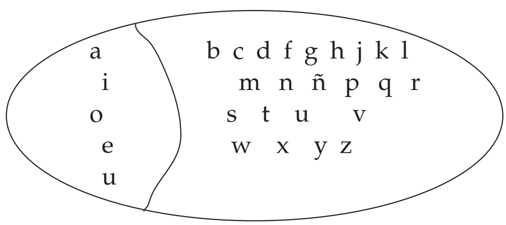
$\beta \in \boldsymbol{V}$	$\beta \in \boldsymbol{C}$	$\beta \in \boldsymbol{V} \,\Delta\, \boldsymbol{C}$	**Región**	p	q	$p \veebar q$
V	V	F	3	V	V	F
V	F	V	2	V	F	V
F	V	V	4	F	V	V
F	F	F	1	F	F	F

El símbolo Δ en teoría de conjuntos se utiliza para la operación *diferencia simétrica*: los elementos que están en la unión, pero no en la intersección.

Se observa que las tablas coinciden y que las regiones 1 y 3 no tienen elementos.

Si se aplica el concepto de partición, el conjunto *U* de las letras del alfabeto se descompone en dos subconjuntos: el de las vocales y el de las consonantes. Los dos conjuntos son disjuntos y con su unión forman el conjunto universal. Gráficamente:

U: letras del alfabeto



Cuando hay una contenencia de conjuntos, el conjunto universal queda dividido en tres regiones como lo muestra la **figura 7**.

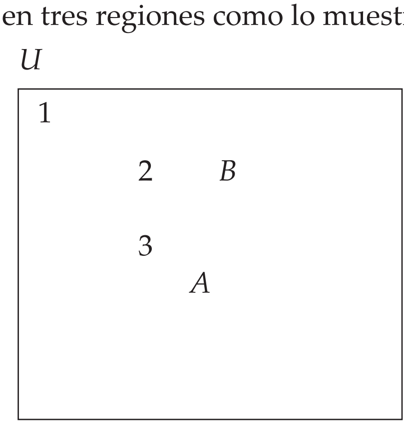


Figura 7

Si x está en la región 1, entonces x ni está en A ni en B.
Si x está en la región 2, entonces x está en B, pero no está en A.
Si x está en la región 3, entonces x está en A y, por lo tanto, en B.

El siguiente ejemplo nos muestra una aplicación:

Ejemplo 2.2.3

Sea U el conjunto de los polígonos y la proposición *si x es un trapecio entonces x es un cuadrilátero*. ¿Cuándo la proposición es verdadera? ¿Y falsa? Dibuje los círculos de Euler correspondientes.

Solución:

La proposición está compuesta por la conjunción condicional si y la subordinante consecutiva *entonces* ($\rightarrow$).
Sea *p: x es un trapecio* y *q: x es un cuadrilátero.*

La proposición compuesta $p \rightarrow q$ será falsa cuando se afirma que *si x es un trapecio entonces x no es un cuadrilátero,* puesto que todo trapecio es un cuadrilátero por definición. Los círculos de Euler se muestran en la **figura 8**:

U: polígonos

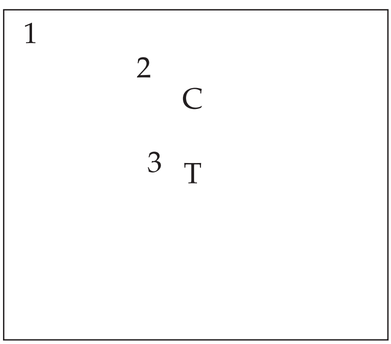


Figura 8

donde C, el conjunto de los cuadriláteros.
T, el conjunto de los trapecios.

Se puede hacer una correspondencia de los círculos de Euler con una tabla de verdad:

$x \in T$	$x \in C$	$T \subset C$	**Región**	p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V	3	V	V	V
V	F	F	No existe	V	F	F
F	V	V	2	F	V	V
F	F	V	1	F	F	V

Observe que las tablas coinciden.

Ejercicios 1.3

Simbolice, utilizando las abreviaturas sugeridas, las siguientes proposiciones:

1. Bogotá es la capital de Colombia (*p*) y Montevideo, la capital de Argentina (*r*).
R/

2. Aristóteles no escribió La República (*r*) o Simón Bolívar nació en Caracas (*s*).
R/

3. El perro es un mamífero (*p*) y el caracol no es un crustáceo (*q*).
R/

4. Si hay oxígeno (*s*) entonces es posible la combustión (*t*).
R/

5. Colombia está en Suramérica (*s*) o está en Centroamérica (*p*).
R/

6. O_3 es la fórmula del ozono (*p*) o Zipaquirá está en Cundinamarca (*s*).
R/

7. Si no arrojas basura a la calle (*r*) entonces no contaminas el río Magdalena (*t*).
R/

8. El sonido no es un fenómeno químico (s) y el hierro no es un metal (t).
R/

9. Si no estudias bien (p) entonces perderás la asignatura (s).
R/

10. No es cierto que Saturno es una estrella (t) o que la Tierra es un planeta (p).
R/

11. No es verdad que 1+1=3 (s) y que 2+1=3 (q).
R/

12. Es falso que si París está en Grecia (p) entonces Berlín está en Francia (t).
R/

Sean *p: "Hace frío"* y *q: "Está lloviendo"*. Escriba con un enunciado verbal las siguientes proposiciones simbólicas. Dibuje el correspondiente diagrama de Venn, excepto para las proposiciones con condicional:

13. $\sim p$ R/____.
14. $p \wedge q$ R/____.
15. p v q R/ _______________________________________.
16. $p \rightarrow \sim q$ R/______________________________________.
17. q v $\sim p$ R/______________________________________.
18. $\sim p \wedge \sim q$ R/_____________________________________.
19. $\sim p \rightarrow q$ R/_____________________________________.
20. $\sim \sim p$ R/ ______________________________________.
21. $\sim (p \rightarrow q)$ R/___________________________________.
22. $\sim (p \wedge q)$ R/____________________________________.
23. $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$ R/ ________________________________.
24. (p v $\sim q$) R/ ___________________________________.

Aplicaciones

En las proposiciones 1-10, dibuje los círculos de Euler y luego halle el objeto que hace que la respectiva proposición sea verdadera o falsa. Concluya con la tabla de verdad correspondiente.

1. *U:* números naturales. x es impar y es menor que 12.

2. *U:* palabras con tilde. x es una palabra grave o una palabra aguda.

3. *U:* triángulos. x es un triángulo isósceles y obtusángulo.

4. *U:* números naturales. x es un número primo o es menor que 20

5. *U:* cuadriláteros. Si x es un rectángulo entonces es un paralelogramo.

6. *U:* vertebrados. x es un ave o un reptil.

7. *U:* números naturales. Si x es divisible entre 6 entonces es divisible entre 3.

8. *U:* números naturales. x es un número entre 4 y 12 y es un número deficiente.

9. *U:* números naturales. Si x es divisible entre 4, entonces es divisible entre 2.

10. *U:* números naturales. x es primo o compuesto.

Las aplicaciones 11-14 se resuelven con base en la siguiente información:

Sea *U:* el conjunto de todos los triángulos, *p: x es un triángulo isósceles*; *q: x es un triángulo acutángulo;* y en el siguiente diagrama de Venn, *I* denota el conjunto de los triángulos isósceles y *A*, el conjunto de los triángulos acutángulos **(figura 9)**:

U: triángulos

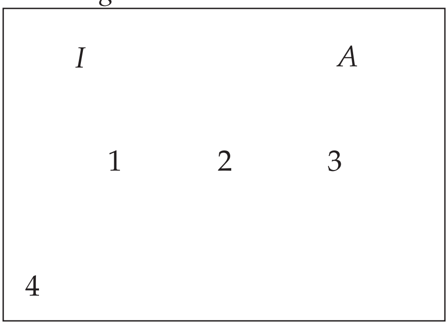


Figura 9

Simbolice las proposiciones abiertas 11-14. Luego especifique qué tipo de triángulo hace que la proposición sea verdadera o falsa y en cada caso identifique con el número la región **(figura 9)** donde estaría el triángulo.

11. *x* es un triángulo isósceles y acutángulo.
R/____.

12. *x* es un triángulo isósceles o acutángulo.
R/____.

13. *x* es un polígono de tres lados.
R/____.

14. *x* es un triángulo acutángulo.
R/____.

15. Sea *U:* el conjunto de los números naturales, *p: x es divisible entre 4*; *q: x es divisible entre 8;* y en el siguiente diagrama de Venn, *C* denota el conjunto de los divisibles entre 4; y *O,* el conjunto de los divisibles entre 8 **(figura 10)**:

U: números naturales

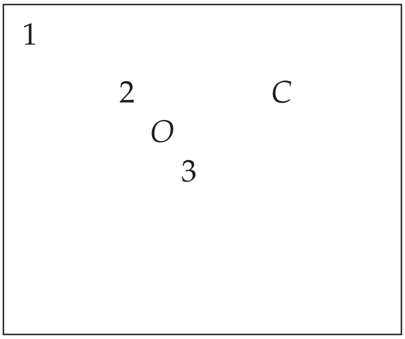


Figura 10

Establezca la proposición abierta para la figura 10. Luego especifique qué números hacen que la proposición sea verdadera o falsa y en cada caso identifique con el número la región donde estaría el número.

16. Sea *U:* el conjunto de los polígonos, *p: x es un triángulo*; *q: x es un cuadrilátero;* y en el siguiente diagrama de Venn, *T* denota el conjunto de los triángulos; y *C*, el conjunto de los cuadriláteros **(figura 11):**

U: polígonos

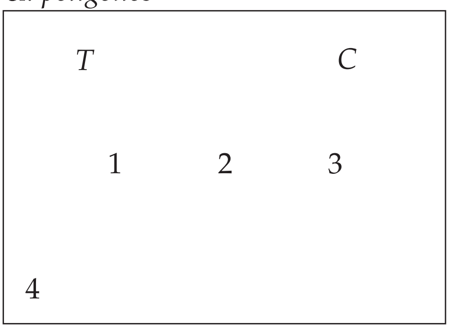


Figura 11

Establezca la proposición abierta para la **figura 11**. Luego especifique qué tipo de polígono hace que la proposición sea verdadera o falsa y en cada caso identifique con el número la región donde estaría el polígono.

17. Sea *U:* el conjunto de los números naturales, *p: x es divisible entre 5*; *q: x es divisible entre 10*. Dibuje el diagrama de Venn, en donde *C* denota el conjunto de los divisibles entre 5 y *D* el conjunto de los divisibles entre 10 para la proposición *si x es divisible entre 10, entonces x es divisible entre 5.* Luego especifique qué números hacen que la proposición sea verdadera o falsa y en cada caso identifique con el número la región donde estaría el número.

18. Sea *U:* el conjunto de los paralelogramos, *p: x es un rombo*, *q: x es un rectángulo*. Dibuje el diagrama de Venn, en donde *R* denota el conjunto de los rombos y *E* el conjunto de los rectángulos para la proposición *x es rombo y un rectángulo.* Luego especifique qué paralelogramos hacen que la proposición sea verdadera o falsa y en cada caso identifique con el número la región donde estaría el paralelogramo.

19. El Señor se dirigió a Moisés y Aarón, y les dijo: "Digan a los israelitas que, de todos los animales que viven en tierra, pueden comer los que sean rumiantes (*r*) y tengan pezuñas partidas (*p*)" (Levítico 11, 1-3). Represente mediante símbolos, utilizando las abreviaturas sugeridas, las condiciones en las cuales un animal no puede ser comido.

20. ¿Cómo cambia la solución al problema anterior si se cambia el conectivo "*y*" por "*o*" ?

***Al final de la Unidad 1 hay un anexo sobre algunos de los conceptos planteados (animales, triángulos, polígonos, entre otros).**

1.4 ANÁLISIS DEL CONDICIONAL

Problema

Una promoción en una casa fotográfica dice: “*Si paga totalmente con anticipación el revelado de su rollo, le obsequiamos uno*”. Un cliente pagó con anticipación el revelado del rollo, pero no le dieron el otro.

Responda las siguientes preguntas:

1. El cliente se enfadó. Explique la razón.
R/____
____
____
____
____

2. ¿Cuáles son las condiciones con las que el cliente no sería engañado?
R/____
____
____
____
____

3. Organice en una tabla sus respuestas a las preguntas anteriores.

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Definición:

> Sean p, q dos proposiciones. La proposición compuesta *si p entonces q*, simbolizada por $p \to q$, se llama el **condicional** de p con q y se define así:
> Si p es verdadera y q es verdadera, entonces $p \to q$ es verdadera.
> Si p es verdadera y q es falsa, entonces $p \to q$ es falsa.
> Si p es falsa y q es verdadera, entonces $p \to q$ es verdadera.
> Si p es falsa y q es falsa, entonces $p \to q$ es verdadera.

En un **condicional,** a la proposición que está entre el *si* y el *entonces* se la denomina **antecedente**, y a la que está después del *entonces,* **consecuente.**

La anterior información se puede resumir en la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \to \mathbf{q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De la tabla de verdad se deduce que el **condicional** $p \circledcirc q$ es falso cuando el **antecedente** p es verdadero y el **consecuente** q es falso. En los demás casos es verdadero.

Lo anterior implica que para demostrar que un condicional es falso, hay que buscar un caso o un ejemplo en el que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, en otras palabras, un ejemplo donde se cumpla el antecedente y no se cumpla el consecuente. Esto se llama **contraejemplo.** En símbolos: $p \to q$ es falso cuando tenemos $p \wedge \sim q$.

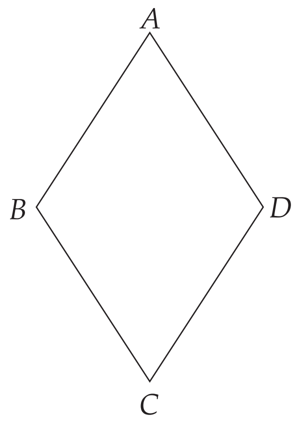
Ejemplo 1.4.1

La proposición *si un cuadrilátero es equilátero, entonces es regular* es verdadera o falsa. Determínelo.

Solución:

Simbolice el antecedente como *p: un cuadrilátero es equilátero* y el consecuente como *q: el cuadrilátero es regular.* En símbolos, la proposición es $p \to q$.

Si la proposición es verdadera, todos los cuadriláteros equiláteros serían regulares. Para demostrar que la proposición $p \to q$ es falsa por contraejemplo, se debe encontrar un cuadrilátero que tenga todos los lados con la misma medida (se cumple el antecedente) y que no sea regular (no se cumple el consecuente). Ese cuadrilátero es el rombo:



El rombo *ABCD* es equilátero y no es regular (cumple el antecedente y no el consecuente: $p \wedge \sim q$).

Existen varias maneras de escribir un condicional.

Definición:

Las siguientes proposiciones son **equivalentes,** esto es, que significan lo mismo:

1. Si p, entonces q.
2. q si p.
3. p sólo si q.
4. p es suficiente para q.
5. q es necesario para p.
6. q cuando p.
7. q siempre que p.
8. Todos los p son q.
9. q con la condición de que p.

Ejemplo 1.4.2

Dada la proposición: *si una figura es un trapecio, entonces es un cuadrilátero.* Las siguientes ocho proposiciones significan lo mismo:

1. Si una figura es un trapecio, entonces es un cuadrilátero.
2. Una figura es un cuadrilátero, si es un trapecio.
3. Una figura es un trapecio sólo si es un cuadrilátero.
4. Que una figura sea un trapecio es suficiente para que sea un cuadrilátero.
5. Que una figura sea un cuadrilátero es necesario para que sea un trapecio.
6. Una figura es un cuadrilátero cuando es un trapecio.
7. Una figura es un cuadrilátero siempre que sea un trapecio.
8. Todos los trapecios son cuadriláteros.
9. Una figura es un cuadrilátero con la condición de que sea un trapecio.

Aplicaciones

1. Una madre le dice a su hijo: *"Si te tomas la sopa (s), entonces te dejo ver televisión (t)".* Represente con símbolos, utilizando las abreviaturas sugeridas, las condiciones con las que la madre no le incumple a su hijo.

2. Un contratista de la empresa de energía eléctrica le promete a un usuario atrasado con el pago de la factura: *"si cancela hoy el recibo, no le corto el servicio."* Sin embargo, en el transcurso del mismo día, el contratista le suspendió el servicio, a pesar de que el usuario había cancelado el recibo en la tarde del día en mención. ¿Le incumplieron la promesa al usuario? Explique su respuesta con una tabla de verdad.

3. Una promoción afirma: "Si compras una boleta (p) y traes diez tapas de gaseosa (t), te regalamos una boleta (r)". Represente con símbolos, utilizando las abreviaturas sugeridas, las condiciones en las cuales estafan a un cliente.

Ejercicios 1.4

Identifique en los condicionales 1 – 4 el antecedente y el consecuente:

1. Si estudias bien, entonces ganarás las asignaturas.
2. Si arrojas basuras a los arroyos, entonces contaminas el agua que tomarás.
3. Si manejas embriagado, entonces tienes altas posibilidades de accidentarte.
4. Si quemamos más combustibles fósiles, el calentamiento global se acentuará.

Traduzca en las ocho proposiciones equivalentes las proposiciones 5-9:

5. Si un triángulo es equilátero, entonces es regular.
6. Si estudias bien, ganarás el curso de Matemáticas.
7. Si $x+3=0$, entonces $x=-3$.
8. Si un número es natural, entonces es entero.
9. Si estudias con dedicación, serás un buen profesional.

Traduzca las siguientes proposiciones a la forma *si…entonces:*

10. Tendrás una personalidad compleja solamente si aprecias la opinión de los demás.
11. Iré a trabajar el lunes si me pagan.
12. Todos los cuadriláteros son polígonos.
13. La presencia de aire es necesaria para la vida.
14. La combustión es una condición suficiente para la presencia de oxígeno.
15. Conseguirá trabajo cuando termine la carrera.
16. Te acompaño al estadio con la condición de que me ayudes a estudiar Biología.

Determine si las proposiciones 17-25 son verdaderas o falsas. Si es verdadera, explique por qué; si es falsa, construya un contraejemplo.

17. Si un número es entero, entonces es natural.
18. Si un triángulo es equiángulo, entonces es regular.
19. Si un animal es un reptil, entonces es una iguana.
20. Todos los números enteros son pares.
21. Todos los elementos de la sangre son glóbulos rojos.
22. Todas las palabras son graves.
23. Un sólido geométrico es una pirámide si es un poliedro.
24. Una figura es un pentágono si es un polígono.
25. Un vertebrado es un pez si es un mamífero.

En los ejercicios 26-28, escriba un condicional acorde con el diagrama de Venn dado:

26. *U: números naturales*

Múltiplos de 3

Múltiplos de 9

27. *U: sólidos geométricos*

Cuerpo redondos

Cilindros

28. *U: Animales invertebrados*

Artrópodos

Crustáceos

1.5 CONDICIONALES DERIVADAS

? Problema

El organismo encargado de vigilar que no atenten el medio ambiente está discutiendo sobre el enunciado de una ley. No ha habido acuerdo, pues hay dos propuestas, a saber:

1. *Si contaminas el río, entonces deberás pagar una multa,* y…
2. *Si pagas una multa, entonces puedes contaminar el río.*

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Tienen las dos proposiciones el mismo significado? Explique.
R/____

2. ¿Cuál de las dos proposiciones debe ser aceptada como la base de la ley y por qué?
R/____

! No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Definición:

Dado el **condicional** *si p entonces q* ($p \to q$), se definen:

1. La **recíproca:** *Si q entonces p* ($q \to p$)
2. La **inversa o contraria:** *Si no p, entonces no q* ($\sim p \to \sim q$)
3. La **contrarrecíproca o contraposición:** *Si no q, entonces no p* ($\sim q \to \sim p$)

Ejemplo 1.5.1

Escriba la recíproca, la contraria y la contrarrecíproca de: *"Si un animal es un perro, entonces es un mamífero"*. Determine el valor de verdad de cada una de ellas y dibuje el correspondiente diagrama de Venn.

Solución:

El condicional dado: *si un animal es un perro, entonces es un mamífero,* es verdadero, porque todos los perros son mamíferos **(figura 12).**

Recíproca: *si un animal es un mamífero, entonces es un perro,* es falsa, porque el gato es un mamífero (se cumple el antecedente) y no es un perro (no se cumple el consecuente).

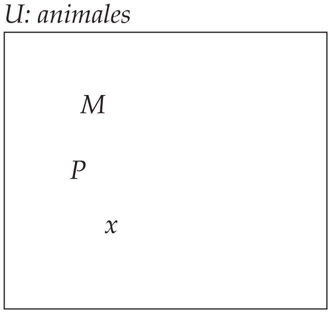


Figura 12

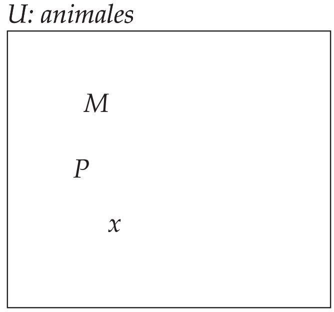


Figura 13

Donde *P: conjunto de los perros* y *M: conjunto de los Mamíferos.*

Contraria: *si un animal no es un perro, entonces no es un mamífero,* es falsa, porque el gato no es un perro y sí es un mamífero. (El antecedente se cumple y el consecuente no).

Contrarrecíproca: *si un animal no es un mamífero, entonces no es un perro,* es verdadera, porque si un animal no es un mamífero, se descarta automáticamente que sea perro, porque el perro es un mamífero **(figura 13).**

Ejemplo 1.5.2

Escriba la recíproca, la contraria y la contrarrecíproca de: *"Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos lados congruentes".* Determine el valor de verdad de cada una de ellas y dibuje el diagrama de Venn.

Solución:

El condicional dado: *si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos lados congruentes,* es verdadero, por definición de triángulo isósceles **(figura 14).**

Recíproca: *si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces es isósceles,* es verdadera, por definición de triángulo isósceles **(figura 15).**

Contraria: *si un triángulo no es isósceles, entonces no tiene dos lados congruentes,* es verdadera, porque si no es isósceles, entonces no puede tener dos lados congruentes.

Contrarrecíproca: *si un triángulo no tiene dos lados iguales, entonces no es isósceles,* es verdadera, porque si no tiene dos lados congruentes, entonces no puede ser isósceles.

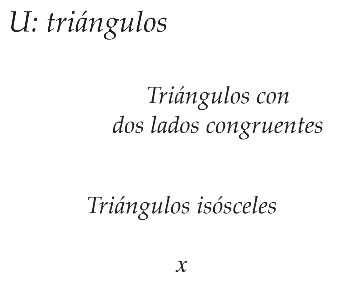


Figura 14

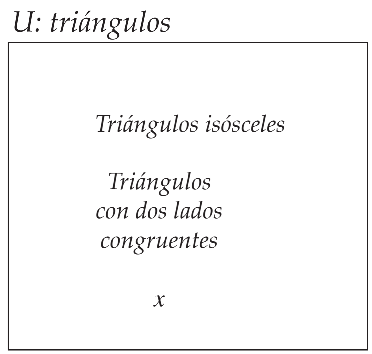


Figura 15

Cuando un condicional ($p \to q$) y su recíproca ($q \to p$) son verdaderos, podemos escribir *p si y sólo si q*, cuya simbolización es $p \to q$. Al conectivo lógico *sí y sólo si* ($\to$) se le llama **bicondicional.** Eso quiere decir que la proposición: "*Un triángulo es isósceles sí y sólo si tiene dos lados congruentes*" es equivalente a la proposición directa y la recíproca de este ejemplo.

Ejercicios 1.5

Escriba la recíproca y determine su valor de verdad en las proposiciones 1-20

1. Todos los murciélagos son mamíferos.
2. Un polígono es un cuadrilátero si tiene cuatro lados.
3. El aumento de temperatura en un gas es suficiente para que aumente su presión.
4. Que dos ángulos sean agudos es necesario para que sean congruentes.
5. x^2 es par siempre que x es impar.
6. $x + y$ es par cuando x y y son impares.
7. Cuando dos rectas se cortan, forman un ángulo agudo.
8. Todo número entero es natural.
9. Un polígono es un decágono cuando tiene nueve lados.
10. Para pasar el curso es suficiente aprobar todos los exámenes.
11. Una condición necesaria para que te vaya bien en matemáticas es asistir a clases.

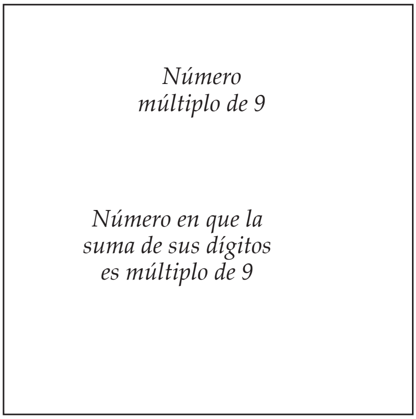
12. Hay humo cuando hay fuego.
13. Un número es divisible por dos siempre que termine en tres.
14. Llueve siempre que existan nubes cargadas.
15. Hay nieve sólo si es invierno.
16. Un triángulo es escaleno si no tiene lados congruentes.
17. Si x es un número primo, entonces x es par.
18. Si un número es divisible por 2, entonces es un número par.
19. Si un número es múltiplo de 3, entonces es múltiplo de 6.
20. Si un número es divisible entre 12, entonces es par.

En los ejercicios 21-24, escriba un condicional acorde con el diagrama de Venn dado. ¿Cuáles se pueden escribir como bicondicionales? ¿Por qué?

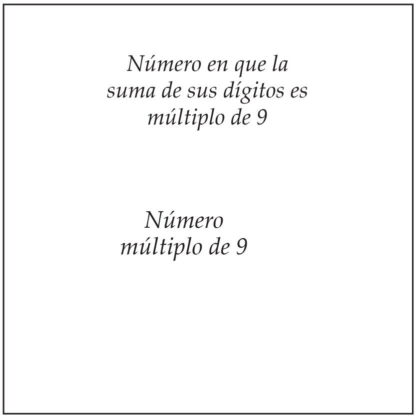
21. *U: triángulos*

22. *U: triángulos*

23. *U: números enteros no negativos*



24. *U: números enteros no negativos*



1.6 CUANTIFICADORES

Problema

Sea la proposición: *algunos triángulos escalenos son obtusángulos.* ¿Cómo representaría en un diagrama de Venn la relación entre los dos conjuntos que establece la proposición? Argumente su respuesta.
R/

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Cuantificadores universal y existencial 1

Una expresión bajo la forma de **para todo, todo, para cada,** o **cada**, se llama **cuantificador universal,** y se simboliza por medio de una A invertida: $\forall$.
Similarmente, una expresión bajo la forma de **existe, alguno,** o **existe por lo menos uno**, se llama **cuantificador existencial** y se simboliza por medio de una E invertida: $\exists$.

Ejemplo 1.6.1

Las siguientes proposiciones tienen cuantificadores:

Todos los Arácnidos son invertebrados, es una proposición con cuantificador universal.

Algunos mamíferos son acuáticos, es una proposición con cuantificador existencial.

Por lo general, las proposiciones con cuantificadores están compuestas por sujeto (el objeto de la proposición), predicado (lo que se afirma o niega acerca del objeto) y cópula (verbo *ser* o *estar*). En lógica, a las proposiciones que tienen esta estructura (aunque no tengan cuantificador) se les denominan **juicios.** En este texto no vamos a diferenciar las proposiciones con cuantificador de los juicios.

Ejemplo 1.6.2

Todos los caballos son mamíferos.
Sujeto: *caballos*
Cópula: *son*
Predicado: *mamíferos*

De acuerdo con la **cualidad**, las proposiciones con cuantificador pueden ser **afirmativas** o **negativas.** 1
De acuerdo con la **cantidad,** las proposiciones con cuantificador se clasifican en: 1

- 1**Universales afirmativas:** todas las S son P. (S es el sujeto y P el predicado)
- 1**Universales negativas:** ninguna S es P.
- 1**Particulares afirmativas:** algunas S son P.
- 1**Particulares negativas:** algunas S no son P.

Cada una de estas proposiciones se diagraman en los **círculos de Euler:**

1) La afirmación: *toda S es P* es equivalente a la definición de inclusión de conjuntos; por lo tanto, se diagrama como lo indica la **figura 16** (siempre que existan P que no son S).

2) La afirmación: *algunas S son P* es equivalente a la definición de intersección de conjuntos; por lo tanto, se diagrama como lo indica la **figura 17**.

3) La afirmación: *ninguna S es P* es equivalente a la definición de conjuntos disjuntos; por lo tanto, se diagrama como lo indica la **figura 18**.

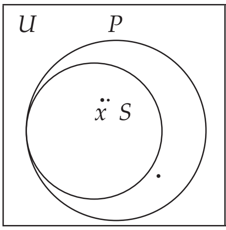


Figura 16

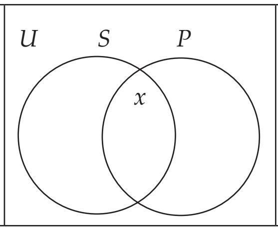


Figura 17

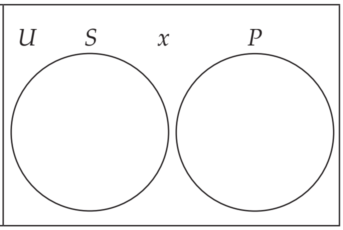


Figura 18

La letra *U* denota el conjunto *universal* y la letra *x* el elemento que satisface la afirmación correspondiente.

¿Cómo se representaría *algunas S no son P*?
R/____

Ejemplo 1.6.3

La representación de la proposición:
Todos los hexágonos son polígonos es la **figura 19.** 1
Algunos triángulos escalenos son obtusángulos es la **figura 20.** 1
Ningún número par es impar es la **figura 21.** 1

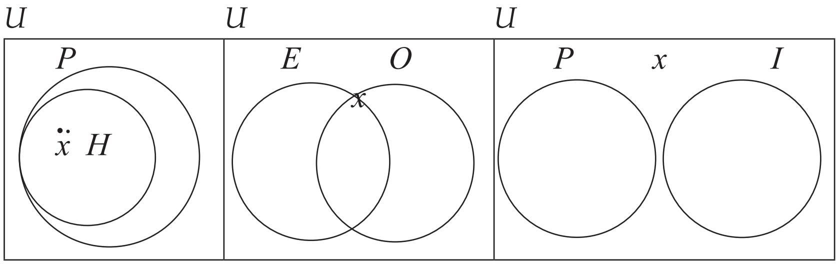


Figura 19 Figura 20 Figura 21

La letra *U* denota el conjunto *universal* y la letra *x* el elemento que satisface la afirmación correspondiente.

Aplicaciones

Complete los enunciados 1 – 45 con las palabras *algunas veces, siempre* o *nunca.* Luego ordene la proposición; identifique el sujeto y el predicado; construya los círculos de Euler correspondientes; y argumente su respuesta.

1. Los números divisibles entre 2________son divisibles entre 4.

2. Los reptiles________________________son invertebrados.

3. Los múltiplos de 5__________________son múltiplos de 10.

4. Los vertebrados_______________________son mamíferos.

5. Los números abundantes__________son números deficientes.

6. Los anfibios ___________________________son moluscos.

7. Las aves ____________________________son vertebrados.

8. Los números primos ___________son números compuestos.

9. Los corpúsculos sanguíneos ______________son eritrocitos.

10. Los eritrocitos ________________________son leucocitos.

11. Los neutrófilos __________________son glóbulos blancos.

12. Los glóbulos blancos ______________________son basófilos.

13. Las plaquetas ___________________corpúsculos sanguíneos.

14. Los linfocitos _______________________________eritrocitos.

15. Los triángulos rectángulos__________________son isósceles.

16. Los triángulos escalenos ________________son equiángulos.

17. Los triángulos equiángulos _______________son equiláteros.

18. Los triángulos isósceles ________________son obtusángulos.

19. Los triángulos equiláteros _______________son acutángulos.

20. Los triángulos obtusángulos________________son escalenos.

21. Los triángulos rectángulos _________________obtusángulos.

22. Los triángulos escalenos ____________________________ son triángulos rectángulos.

23. Los triángulos equiláteros _________________obtusángulos.

24. Los triángulos escalenos ____________________acutángulos.

25. Los antígenos __________________________son antígenos A.

26. Los antígenos AB_______________________son antígenos B.

27. Los antígenos A_______________________son antígenos AB.

28. Los antígenos B __________________________son antígenos.

29. Los antígenos A________________________son antígenos B.

Complete el siguiente cuadro. Debe argumentar.

Grupo sanguíneo	**Antígeno**	**Pueden dar sangre a personas del grupo**	**Pueden recibir sangre de personas del grupo**
A			
B			
AB			
O			

30. Los rectángulos ______________________________ son trapecios.
31. Los rombos ___________________________ son paralelogramos.
32. Los cuadrados ________________________________ son rombos.
33. Los rombos ________________________________ son cuadrados.
34. Los rectángulos _______________________ son paralelogramos.
35. Los cuadrados_____________________________ son rectángulos.
36. Los paralelogramos _______________________ son rectángulos.
37. Los trapecios rectángulos ________________________ isósceles.
38. Los trapecios rectángulos _______________________ escalenos.
39. Los trapecios escalenos _________________________ isósceles.
40. Los polígonos _____________________________ son equiláteros.
41. Los polígonos regulares ___________________ son equiángulos.
42. Los polígonos irregulares __________________ son equiláteros.
43. Los polígonos equiláteros ____________________ son regulares.
44. Los cuerpos redondos__________________________ son esferas.
45. Los poliedros_______________________________ son pirámides.

1.7 PENSAMIENTO INDUCTIVO

Problema

Helena, la mejor amiga de Berta, le ha explicado en muchas ocasiones la importancia de hacer ejercicio físico. Helena va todos los martes y jueves al gimnasio a realizar aeróbicos. En la última conversación que tuvieron, Berta le dijo que la próxima vez la iba a acompañar.

Responda las siguientes preguntas:

1. Si hoy es martes, ¿qué conclusión puede obtener?
R/____
____.

2. Explique por qué llegó a la conclusión que estableció en la respuesta a la pregunta anterior.
R/____
____.

> **No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.**

Teoría

Existen dos tipos de razonamiento: inductivo y deductivo. Ya se estudiaron algunas aplicaciones del razonamiento deductivo; en esta sección se verá el proceso del razonamiento inductivo y sus aplicaciones.

Definición:

> El **pensamiento inductivo** es el pensamiento que permite identificar patrones a partir de ejemplos específicos de una situación para obtener una conclusión (generalización). Por esta razón, este tipo de pensamiento va de lo particular a lo general.

La conclusión que se obtiene puede ser falsa o verdadera. Para demostrar que es falsa, basta con mostrar un ejemplo donde no funcione la conclusión. A este ejemplo se le denomina **contraejemplo**. Y para aceptar que la conclusión obtenida es verdadera, se debe demostrar por métodos de razonamiento deductivo. Las matemáticas se caracterizan por demostrar las propiedades (teoremas) establecidas para garantizar que la proposición siempre es verdadera. En esta sección no se van a demostrar las conclusiones que se establezcan.

Ejemplo 1.7.1

Determine los siguientes tres números de la sucesión 2, 5, 8…

Solución:

Después de observar los tres números, se concluye que el patrón que existe es que cada uno de los dos últimos números de la sucesión se obtiene sumándole tres al anterior: 2 + 3 = 5 y 5 + 3 = 8, por lo tanto, los siguientes tres números se obtendrán con el mismo patrón:

8 + 3 = 11
11 + 3 = 14
14 + 3 = 17

Entonces, la solución es: 2, 5, 8, **11, 14, 17.**

Ejemplo 1.7.2

Determine los siguientes cuatro números de la sucesión
$3, \frac{1}{2}, 6, \frac{3}{2}, 12, \frac{5}{2} \ldots$

Solución:

De un número al siguiente no existe relación, pero el primero, el tercero y el quinto sí: el patrón es que para obtener un término impar de la sucesión, se le debe sumar uno al anterior; mientras que para obtener un número par de la sucesión, se debe multiplicar el anterior por dos. Por lo tanto, los términos impares que siguen son $\frac{7}{2}$ y $\frac{9}{2}$, y los términos pares son 24 y 48.
Entonces, la solución es: $3, \frac{1}{2}, 6, \frac{3}{2}, 12, \frac{5}{2}, 24, \frac{7}{2}, 48, \frac{9}{2}$

Ejemplo 1.7.3

Considere la siguiente lista de multiplicaciones:

37 x 3 = 111
37 x 6 = 222
37 x 9 = 333
37 x 12 = 444

Analice la lista, descubra el patrón y escriba las dos multiplicaciones que siguen.

Solución:

El multiplicando es constante, 37; el multiplicador es múltiplo de tres, y el producto es un número de tres dígitos iguales que va aumentando en ciento once unidades. Por lo tanto, la solución es:

37 x 3 = 111
37 x 6 = 222

$$37 \times 9 = 333$$
$$37 \times 12 = 444$$
$$\mathbf{37} \times \mathbf{15 = 555}$$
$$\mathbf{37} \times \mathbf{18 = 666}$$

Para comprobar si las dos multiplicaciones planteadas son correctas, efectúelas.

Ejemplo 1.7.4

Escriba las tres siguientes filas de las siguientes igualdades que establecen un patrón numérico y generalice en una fórmula dicho patrón:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+2 &= 3 \\ 1+2+3 &= 6 \\ 1+2+3+4 &= 10 \end{aligned}$$

Solución:

Las igualdades plantean la suma de los primeros naturales; por lo tanto, las tres filas que siguen son:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+2 &= 3 \\ 1+2+3 &= 6 \\ 1+2+3+4 &= 10 \\ \mathbf{1+2+3+4+5} &\mathbf{= 15} \\ \mathbf{1+2+3+4+5+6} &\mathbf{= 21} \\ \mathbf{1+2+3+4+5+6+7} &\mathbf{= 28} \end{aligned}$$

Para deducir la fórmula del lado derecho, es conveniente que se interprete geométricamente la suma anterior en la **figura 22,** compuesta por cuadrados de una unidad de lado**:** 1

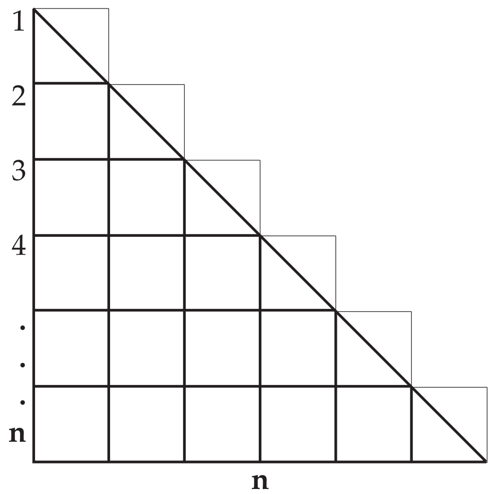


Figura 22

La **figura 22** se divide en dos partes: una es el triángulo rectángulo de base y altura *n*, y la otra, los *n* medios cuadrados. De donde se obtiene que el área de la **figura 22** es:

$A = \frac{n \cdot n}{2} + n\left(\frac{1 \cdot 1}{2}\right)$ por la fórmula del área de un triángulo y de medio cuadrado.

$A = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ por suma de fracciones y factor común.

Compruebe que la fórmula: $A = \frac{n(n+1)}{2}$ satisfface las igualdades dadas.

En algunas sucesiones no es fácil obtener el siguiente término de ellas mismas, por lo que es necesario aplicar el **método de las diferencias sucesivas**, tal como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.7.5

Determine los tres siguientes términos de la sucesión 3, 5, 11, 21, 35, 53…

Solución:

A simple vista no se observa un patrón, por lo que se halla la diferencia entre un término de la sucesión y el anterior:

Término	3	5	11	21	35	53
Diferencia	2	6	10	14	18	

Dado que la diferencia no es constante, se calcula la diferencia de los términos de la diferencia:

Término	3	5	11	21	35	53
Diferencia 1	2	6	10	14	18	
Diferencia 2	4	4	4	4		

Como esta diferencia es constante, se pueden deducir los tres siguientes términos de la sucesión original sumando 4 a los términos de la sucesión de la diferencia 1 y después sumando esta diferencia a los términos de la sucesión original:

Término	3	5	11	21	35	53	75	101	131
Diferencia 1	2	6	10	14	18	22	26	30	
Diferencia 2	4	4	4	4	4	4	4		

Por lo tanto, la solución es: 3, 5, 11, 21, 35, 53, **75, 101, 131.**

Ejercicios 1.7

Determine en las sucesiones 1-14 los siguientes cinco términos.

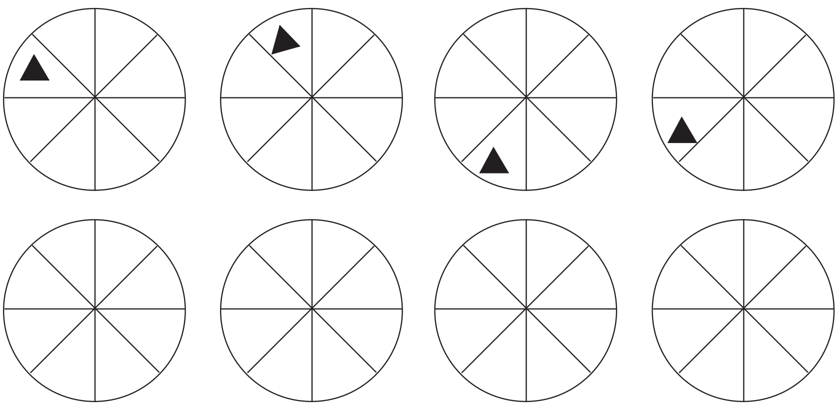
1. 3, 9, 15, 21…
2. 2, 8, 32…
3. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…
4. 4, 8, 16, 32…
5. 13, 18, 23…
6. 32, 16, 8…

7. 3, 6, 9, 15, 24, 39…
8. 2, 5, 5, 7, 8, 9…
9. 1, 8, 27, 64…
10. 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0…
11. 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0…

12. $4, \frac{2}{3}, 10, \frac{5}{3}, 16, \frac{8}{3} \ldots$ **13.** $24, \frac{1}{4}, 12, \frac{1}{9}, 6, \frac{1}{16} \ldots$

14. $9, 1, 3, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3} \ldots$

15. Encuentre el patrón en las siguientes circunferencias lógicas y dibuje el triángulo donde corresponda:



16. Escriba las cuatro filas que siguen en el triángulo de Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Ahora, sume los números en cada fila. ¿Existe algún patrón?

Para cada uno de los ejercicios 17-21 se da una lista de operaciones. Analice cada lista y utilice el pensamiento inductivo para escribir las tres filas de operaciones correspondientes. Luego verifíquelas.

17.
$$(1 \times 9) + 2 = 11$$
$$(12 \times 9) + 3 = 111$$
$$(123 \times 9) + 4 = 1.111$$

18.
$$(9 \times 9) + 7 = 88$$
$$(98 \times 9) + 6 = 888$$
$$(987 \times 9) + 5 = 8.888$$

19.
$$2 = 4 - 2$$
$$2 + 4 = 8 - 2$$
$$2 + 4 + 8 = 16 - 2$$

20.
$$1^2 = 1^3$$
$$(1 + 2)^2 = 1^3 + 2^3$$
$$(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

21.
$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

22.
$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

En los ejercicios 23-26 aplique el método de las diferencias sucesivas para calcular los siguientes tres términos de la sucesión dada:

23. 2, 3, 6, 11, 18, 27…
24. 4, 5, 12, 31, 68, 129…
25. 5, 7, 21, 59, 133…
26. 4, 9, 24, 49, 84, 129…

Cuenta la historia que el matemático Karl Gauss (1777-1855) respondió con gran rapidez a la pregunta del profesor de matemáticas: "¿Cuál es la suma de los primeros 100 números naturales?" Había observado que eran 50 pares de números que sumaban 101, luego la suma era 50 x 101 = 5050, su respuesta.

Utilice el método de Gauss para determinar las sumas 27-30:

27. $1 + 2 + 3 + \ldots + 250$
28. $1 + 2 + 3 + \ldots + 325$

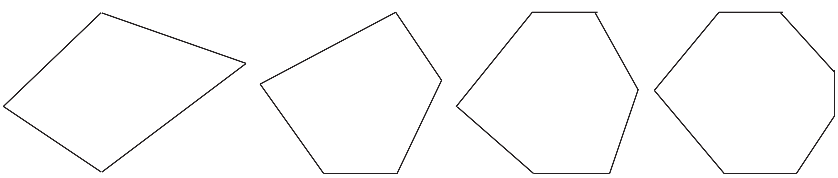
29. 2 + 4 + 6 + … + 100
30. 4 + 8 + 12 + … + 200

En los ejercicios 31-33, seleccione cada número y compare la suma de sus divisores, excepto la de él mismo (divisores propios), con el número correspondiente. ¿Qué conclusión obtuvo para los números de cada ejercicio?

31. 6, 28 y 496.
32. 4, 10 y 15.
33. 12, 18 y 20.

Aplicaciones

1. En cada polígono trace todas las diagonales posibles de un solo vértice.



Ahora complete la siguiente tabla:

Polígono	**Número de lados**	**Número de triángulos**	**Suma de las medidas de los ángulos internos**
Cuadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
n - lados			

Responda las siguientes preguntas a partir de los datos que escribió en la tabla: ¿qué conclusión puede obtener acerca de la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo? ¿Pudo obtener una fórmula para ello? Y si el polígono es regular, ¿la fórmula sigue siendo válida? ¿Cómo se obtiene la medida de un ángulo interno de un polígono regular?

R/ ____

____

____

____

____

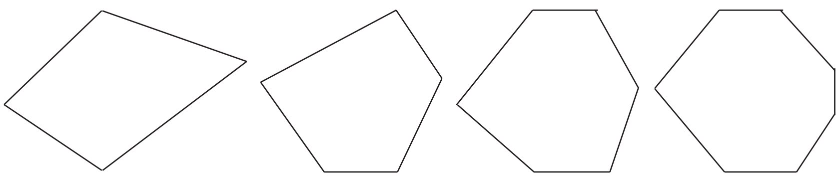
____

____

____

____

2. En cada polígono trace todas las diagonales posibles de cada polígono.



Ahora complete la siguiente tabla:

Polígono	**Número de lados**	**Número de diagonales desde un vértice**	**Número total de diagonales**
Cuadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
n - lados			

Responda las siguientes preguntas a partir de los datos que escribió en la tabla: ¿qué conclusión puede obtener acerca del número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un

polígono convexo? ¿Pudo obtener una fórmula para ello? ¿Cuál es la fórmula que permite obtener el número total de diagonales de un polígono?
R/____
____
____
____
____
____
____

3. En algunas ocasiones el pensamiento inductivo puede fallar. La **figura 23** muestra el número de regiones formadas cuando se localizan puntos sobre una circunferencia y se unen por medio de una cuerda. Haga los dibujos correspondientes para determinar el número de regiones cuando se localizan 4, 5 y 6 puntos y así completar la tabla adjunta. ¿Qué concluye?

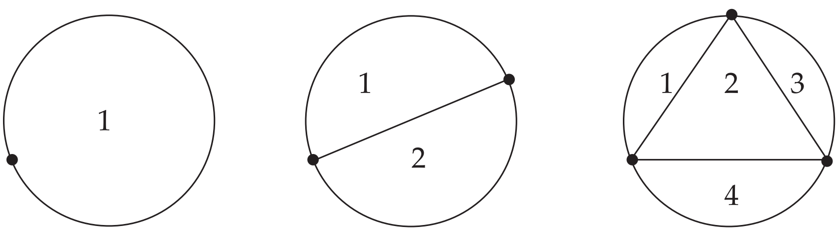


Figura 23

Número de puntos	Número de regiones
1	1
2	2
3	4
4	
5	
6	

ANEXOS

Anexo 1
Teoría de números

Si *a* y *b* son números naturales y si $a=kb$, entonces *b* es un **divisor** o un **factor** de *a*, y se escribe $b \mid a$, o que *a* es un **múltiplo** de *b*.

Ejemplo:

20 = 2 (10), luego $10 \mid 20$, o sea, 10 es un factor de 20 y 20 es un múltiplo de 10.

Un número **par** es un número natural que es divisible entre 2, e **impar** si no es divisible entre 2.

Ejemplo:

El 24 es par porque $2 \mid 24$, o sea, 2 es un factor de 24; mientras que 31 es impar porque no es divisible entre 2.

Un número natural mayor que 1, que sólo tiene el número mismo y el 1 como factores, se denomina **número primo.** Un número natural mayor que 1, que **no es primo,** se denomina **número compuesto.**

Ejemplo:

El número 5 es primo porque solamente tiene como factores el 5 y el 1.

El número 6 es compuesto porque tiene como factores el 1, el 2, el 3 y el 6.

El número 1 no es primo ni compuesto.

Otra definición de número primo es la siguiente: 1

> Un **número primo** es un número natural que tiene exactamente dos factores distintos.

Un teorema en matemáticas afirma que sólo hay una forma de escribir un número compuesto en términos de sus factores:

Teorema de descomposición única o fundamental de la aritmética

> Todo número natural compuesto puede expresarse como un producto de factores primos y, si no se tiene en cuenta el orden de los factores, la expresión es única.

Ejemplo:

La descomposición del 15 en sus factores primos es:

15	5	Se divide 15 entre 5 y el cociente es 3
3	3	Se divide 3 entre 3 y el cociente es 1
1		

Esta descomposición del 15 en sus factores primos: $15 = 5 \cdot 3$ es única, si no tenemos en cuenta el orden de los factores.

Ejemplo:

La descomposición del 40 en sus factores primos es:

40	2	Se divide el 40 entre 2 y el cociente es 20.
20	2	Se divide el 20 entre 2 y el cociente es 10.
10	2	Se divide el 10 entre 2 y el cociente es 5.
5	5	Se divide el 5 entre 5 y el cociente es 1.
1		

Por el teorema fundamental de la aritmética, esta descomposición del 40 en sus factores primos: $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$ es la única, si no tenemos en cuenta el orden de los factores.

> Los **divisores propios** de un número natural incluyen todos los divisores del número excepto el número mismo.

Ejemplo:

Los divisores del 12 son: 1, 2, 3, 4 , 6 y 12. Los divisores propios del 12 son 1, 2, 3 y 6. El 12 no es divisor propio de 12.

> Un **número deficiente** es un número natural en el cual la suma de sus divisores propios es menor que él.

Ejemplo:

Los divisores propios del 8 son 1, 2 y 4. La suma de los divisores propios es $1 + 2 + 4 = 7$ y como $7 < 8$, 8 es un número deficiente.

> Un **número abundante** es un número natural en el cual la suma de sus divisores propios es mayor que él.

Ejemplo:

Los divisores propios de 12 son 1, 2, 3, 4 y 6. La suma de los divisores propios es $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ y como $16 > 12$, 12 es un número abundante.

> Un **número perfecto** es un número natural en el cual la suma sus divisores propios es igual a él.

Ejemplo:

Los divisores propios del 6 son 1, 2 y 3. La suma de los divisores propios es $1 + 2 + 3 = 6$. Como $6 = 6$, el 6 es un número perfecto.

Prueba de la divisibilidad 1

Divisible entre	**Prueba**	**Ejemplo**
4	Los dos últimos dígitos forman un número divisible entre 4.	264, porque 64 es divisible entre 4.
6	El número es divisible entre 2 y entre 3.	486
8	Los tres últimos dígitos forman un número divisible entre 8.	1072, porque 72 es divisible entre 8.
12	El número es divisible entre 3 y entre 4.	4380

Anexo 2
Los animales

Los animales se dividen en dos grandes grupos: **unicelulares y pluricelulares**.

Unicelulares o **protozoarios** son los animales cuyo cuerpo está constituido por una sola célula. Sólo son visibles al microscopio. *Ejemplos:* ameba, infusorios, paramecio, etc.

Pluricelulares o **metazoarios** son los formados por muchas células. *Ejemplos:* gusano, saltamontes, caimán, el hombre.

Los **metazoarios** se dividen en ocho tipos: Espongiarios, Celenterados, Equinodermos, Gusanos, Artrópodos, Moluscos, Procordados y Vertebrados.

Los siete primeros son llamados **Invertebrados** porque carecen de columna vertebral. *Ejemplos:* la esponja, un gusano, un camarón, una abeja.

Los **invertebrados** se clasifican en:

Espongiarios: las esponjas.

Celenterados: madréporas y corales.

Equinodermos: erizo de mar, estrella de mar y araña de mar.

Gusanos: lombriz de tierra, sanguijuela, tenia o solitaria, triquina, etc.

Artrópodos: Se clasifican en:

- Crustáceos. *Ejemplos:* camarón, cangrejo, langosta de mar.
- Miriápodos. *Ejemplos:* milpiés y ciempiés.

- Arácnidos. *Ejemplos:* araña, alacrán, garrapata.
- Insectos. *Ejemplos:* mosca, hormiga, abeja.

Moluscos: caracol, babosa.

Procordados: anfioxo o pez lanceta, ascidia.

Vertebrados: Son los que tienen vértebras o huesos. Se clasifican en cinco clases:

- Peces.
- Anfibios.
- Reptiles.
- Aves.
- Mamíferos.

Anexo 3
La sangre

La sangre del ser humano está compuesta por dos partes fundamentales: **las células o fragmentos celulares** y **el plasma.**

El plasma

Es el fluido en el cual se encuentran suspendidos los corpúsculos celulares y que contiene una gran cantidad de iones, moléculas inorgánicas y moléculas orgánicas. El volumen normal del plasma es aproximadamente el 5% del peso corporal, o sea, 3500 ml en un hombre de 70 kg.

El porcentaje del volumen sanguíneo ocupado por los corpúsculos es del 45% y recibe el nombre de *hematocrito.*

Está constituido en su mayor parte por agua, iones en solución, carbohidratos, lípidos, enzimas, gases en disolución, proteínas y otras sustancias complejas. Dentro de las proteínas se destacan:

- 1La *albúmina,* fabricada por el hígado y ayuda al mantenimiento del volumen sanguíneo.
- 1Las *globulinas,* base de la inmunidad contra determinadas enfermedades infecciosas, como son el sarampión, la poliomelitis o la hepatitis infecciosa.
- 1El *fibrinógeno,* componente esencial en el proceso de la coagulación sanguínea.

Los corpúsculos sanguíneos

En la sangre se encuentra tres clases de elementos o corpúsculos:

- 1Los *eritrocitos* o *glóbulos rojos.*
- 1Los *leucocitos* o *glóbulos blancos.*
- 1Las *plaquetas.*

Los **glóbulos rojos** tienen un promedio de vida de 120 días aproximadamente. Una persona normal contiene aproximadamente cinco millones de glóbulos rojos por cada mm^3 de sangre.

Los **glóbulos rojos** contienen *hemoglobina*, pigmento rojo en el cual se transporta el oxígeno. La sangre contiene aproximadamente de 15-16 g por cada 100 ml.

Los **glóbulos blancos** o **leucocitos** tienen como función la defensa del organismo contra invasores o partículas extrañas. Cuando hay una infección hay un aumento de los glóbulos blancos en la sangre. El hombre normalmente tiene entre 7000 a 11 000 leucocitos por mm^3 de sangre.

Los **glóbulos blancos** son incoloros, no poseen *hemoglobina*. Hay cinco tipos diferentes:

- 1Los *neutrófilos* y los *monocitos* fagocitan partículas extrañas que penetran al cuerpo.
- 1Los *linfocitos*. Ayudan a combatir las enfermedades con la formación de proteínas llamadas *anticuerpos*.
- 1Los *eosinófilos* y *basófilos*. Aumentan durante las reacciones alérgicas que se producen cuando hay infecciones por gusanos parásitos.

Las **plaquetas** fragmentos de células gigantes de la médula ósea de los huesos. En el hombre hay unas 300 000 por mm^3. Su función es intervenir durante el proceso de la coagulación sanguínea.

Anexo 4
Grupos sanguíneos

Algunas personas poseen en las paredes de sus glóbulos rojos unas proteínas características. Si estas personas donan sangre a otras con glóbulos rojos distintos, se produce una reacción entre los eritrocitos del donante y unas sustancias existentes en el plasma del receptor. Esta reacción produce la muerte del receptor.

Las proteínas características que poseen estos glóbulos rojos se llaman **antígenos** o **aglutinógenos.** Las sustancias del plasma que reaccionan con las anteriores se denominan **aglutininas** o **anticuerpos.**

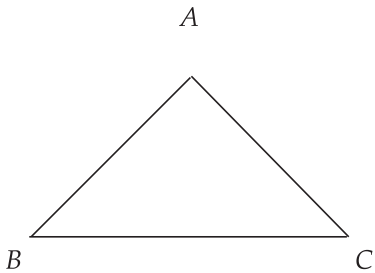
En el ser humano se encuentran dos tipos de **antígenos:** el antígeno *A* y el antígeno *B*.

Todas las personas pertenecen a uno de los siguientes cuatro grupos:

- Grupo *A*, las que tienen el antígeno *A*.
- Grupo *B*, las que tienen el antígeno *B*.
- Grupo *AB*, las que tienen los dos antígenos: *A* y *B*.
- Grupo *O,* las que no tienen antígenos.

Anexo 5
Triángulos

Un **triángulo** es la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales.

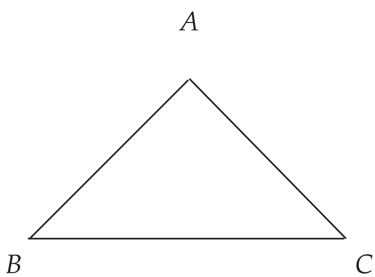


El triángulo ABC se denota ABC. A, B y C son los *vértices*; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son los *lados* y $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son los *ángulos* del ABC.

Según los ángulos, los triángulos se clasifican en:

- Acutángulos.
- Rectángulos.
- Obtusángulos.
- Equiángulos.

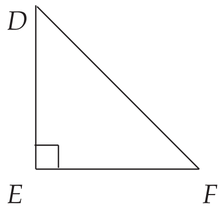
Un **triángulo acutángulo** es un triángulo que tiene los tres ángulos agudos.



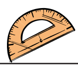
El $\triangle ABC$ es un triángulo acutángulo.

Halle las medidas de los tres ángulos y escríbalas.

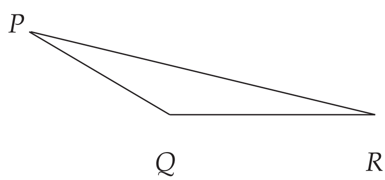
Un **triángulo rectángulo** es un triángulo que tiene un ángulo recto.



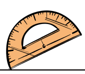
El △ *DEF* es un triángulo rectángulo.
En un triángulo rectángulo, el lado que se opone al ángulo recto se le denomina *hipotenusa* y a los dos lados restantes, *catetos*. En el *DEF*, $\overline{\text{DF}}$ es la hipotenusa, y $\overline{\text{DE}}$ y $\overline{\text{EF}}$ son los catetos.


Halle las medidas de los ángulos agudos y escríbalas.

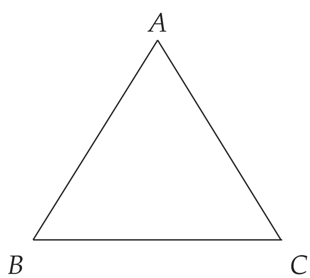
Un **triángulo obtusángulo** es un triángulo que tiene un ángulo obtuso.



El △ *PQR* es un triángulo obtusángulo.


Halle las medidas de los tres ángulos y escríbalas.

Un **triángulo equiángulo** es un triángulo que tiene los tres ángulos congruentes.

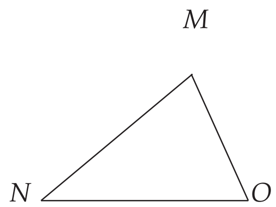


El △ *ABC* es un triángulo equiángulo.

Según la medida de los lados, los triángulos se clasifican en:

- Escaleno.
- Isósceles.
- Equilátero.

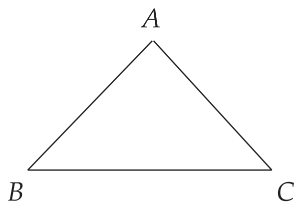
Un **triángulo escaleno** es un triángulo que no tiene lados congruentes.



El $\triangle MNO$ es un triángulo escaleno.

Halle las medidas de los tres lados y escríbalas.

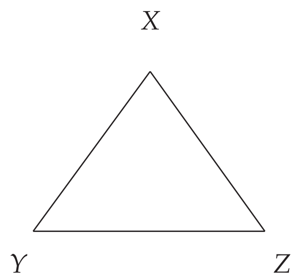
Un **triángulo isósceles** es un triángulo que tiene dos lados congruentes. El otro lado es la *base*. Los dos ángulos asociados con la base son *ángulos en la base.* El ángulo opuesto a la base es el *ángulo en el vértice.*



El $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles. $\overline{BC}$ es la base; $\angle A$ el ángulo en el vértice, y $\angle B$ y $\angle C$ son los ángulos en la base.

Halle las medidas de los tres lados y escríbalas.

Un **triángulo equilátero** es un triángulo que tiene los tres lados congruentes

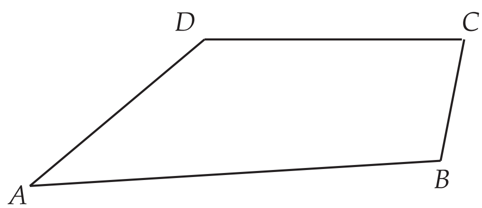


El $\triangle XYZ$ es un triángulo equilátero.

Halle las medidas de los tres lados y escríbalas.

Anexo 6
Cuadriláteros

Un **cuadrilátero** es la unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, tres de ellos no colineales. Los segmentos se intersecan sólo en sus extremos.



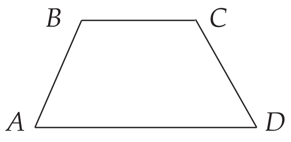
El cuadrilátero *ABCD* se denota $\square$ *ABCD*. *A, B, C* y *D* son los *vértices*; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son los *lados* y $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$ son los *ángulos* del $\square$ *ABCD*.

- Los lados que no tienen un vértice común son *lados opuestos.* $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son un par de lados opuestos.
- Los lados que tienen un vértice común son *lados adyacentes.* $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ son un par de lados adyacentes.
- Los ángulos que no tienen un lado común son *ángulos opuestos.* $\angle A$ y $\angle C$ son un par de ángulos opuestos.
- Los ángulos que tienen un lado común son *ángulos adyacentes.* $\angle A$ y $\angle D$ son un par de ángulos adyacentes.

Los cuadriláteros se clasifican en:

- 1Trapecios.
- 1Paralelogramos.
- 1Rectángulos.
- 1Rombos.
- 1Cuadrados.

Un **trapecio** es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.



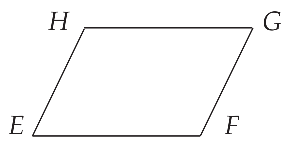
En el trapecio □ *ABCD*, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

Los trapecios se clasifican en:

- Escalenos.
- Isósceles.
- Rectángulos.

Un **trapecio escaleno** es el que no tiene lados congruentes.
El **isósceles** es un trapecio que tiene dos lados congruentes.
Un **trapecio rectángulo** tiene un ángulo recto.

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.



□ *EFGH* es un paralelogramo.

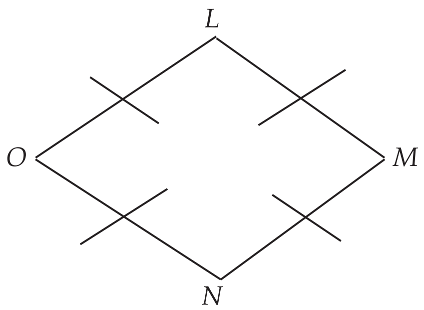
Propiedades 1

Algunas de las propiedades de los paralelogramos son:
- Los pares de ángulos adyacentes son suplementarios (la suma de sus medidas es 180º).
- Los ángulos opuestos son congruentes.
- Los lados opuestos son congruentes.
- Las diagonales se bisecan.

Un **rectángulo** es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos.

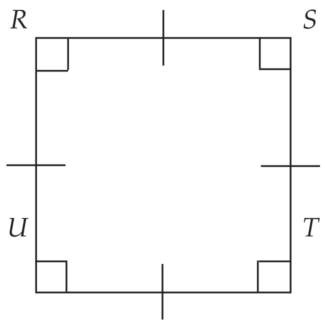
☐ *PQRS* es un rectángulo.

Un **rombo** es un paralelogramo con cuatro lados congruentes.



☐ *LMNO* es un rombo.

Un **cuadrado** es un rectángulo con cuatro lados congruentes.



☐ *RSTU* es un cuadrado.

Anexo 7
Polígonos

Un **polígono** es la unión de segmentos que se juntan sólo en sus extremos, de tal manera que:

1. Como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto, y…

2. Cada segmento toca exactamente a otros dos.

Los polígonos se denotan con las letras mayúsculas con las que se denotan los vértices del mismo.

Construya tres polígonos de más de cuatro lados y denótelos.

R/

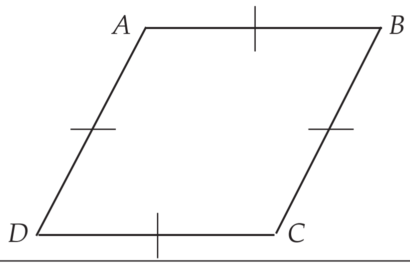
Los polígonos reciben el nombre de acuerdo al número de lados que tengan:

Número de lados	**Nombre del polígono**
Tres	Triángulo
Cuatro	Cuadrilátero
Cinco	Pentágono
Seis	Hexágono
Siete	Heptágono
Ocho	Octágono
Nueve	Nonágono o eneágono
Diez	Decágono
Once	Endecágono
Doce	Dodecágono
Quince	Pentadecágono
Veinte	Isodecágono

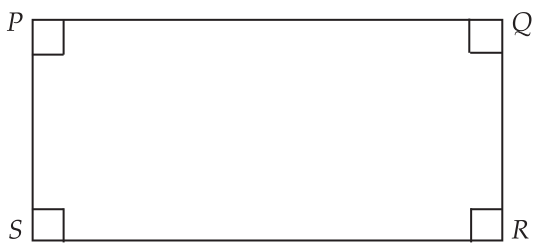
Un polígono de n lados se llama *n-gono.*
Los polígonos se clasifican en:

- Equiláteros.
- Equiángulos.
- Regulares.
- Irregulares.

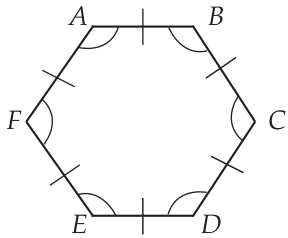
Un **polígono equilátero** es el que tiene todos los lados congruentes.
El rombo *ABCD* es equilátero porque tiene todos los lados congruentes.



Un **polígono equiángulo** es el que tiene todos los ángulos congruentes.
El rectángulo *PQRS* es equiángulo porque tiene todos los ángulos congruentes.



Un **polígono regular** es el que tiene todos los lados congruentes (equilátero) y todos los ángulos congruentes (equiángulo).

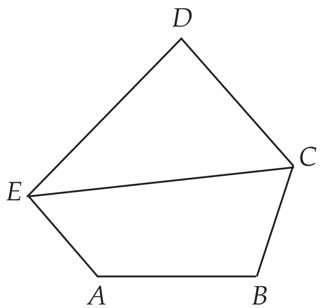


El hexágono *ABCDEF* es regular porque tiene todos los lados congruentes y todos los ángulos congruentes.

Un **polígono irregular** es un polígono que no es regular.

Definición:

Un **polígono convexo** es el que contiene todas sus diagonales en su interior.



El polígono *ABCDE* es convexo porque contiene todas sus diagonales en su interior.

Anexo 8
Sólidos geométricos

Los sólidos geométricos se clasifican en **poliedros** y **cuerpos redondos**.

Un **poliedro** está formado por un número finito de regiones poligonales. Cada arista de una región es exactamente la arista de otra región. Si dos regiones se intersecan, lo hacen en una arista. Las aristas se intersecan en un vértice.

Los sólidos (a excepción de la esfera) que estudiaremos serán **rectos,** y son aquellos cuya altura es perpendicular a la base.

Los **poliedros** se clasifican en:

- Prismas
- Pirámides

Un **prisma** es un poliedro que:

1. Tiene un par de caras congruentes, denominadas *bases*, sobre planos paralelos.
2. Todas las demás caras son regiones paralelográmicas.

Los prismas se nombran de acuerdo a la base. Por ejemplo, si las bases son rectángulos, se llama prisma rectangular (**figura 24)**; si son cuadrados, prisma cuadrangular **(figura 25)**; si son triángulos, prisma triangular, y así sucesivamente.

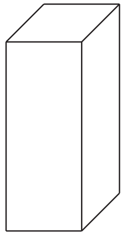


Figura 24

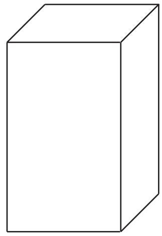


Figura 25

Un **paralelepípedo** es un prisma cuya base es una región paralelográmica **(figura 26).** Todas las caras son regiones paralelográmicas.

Un **paralelepípedo rectangular** es un prisma rectangular recto, es decir, todas sus caras son regiones rectangulares **(figura 27).**

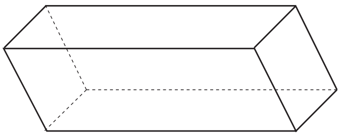


Figura 26

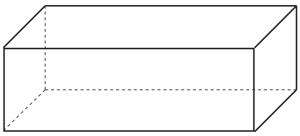


Figura 27

Una **pirámide** es un poliedro que, a excepción de una, todas las demás caras tienen un vértice común. Ese vértice común es el *vértice* o *cúspide* de la pirámide. La cara que no contiene a la *cúspide* es la *base* de la pirámide.

Como los prismas, las pirámides se nombran de acuerdo a la base: pirámide triangular (base es un triángulo); pirámide cuadrangular (base es un cuadrado), **figura 28**; pirámide pentagonal (base es un pentágono), **figura 29** y así sucesivamente.

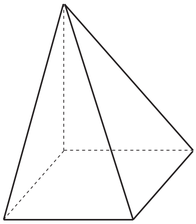


Figura 28

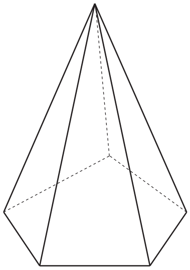


Figura 29

Un **cuerpo redondo** es un sólido que no tiene ángulos poliedros. Se clasifica en tres:

- Cilindros
- Conos
- Esferas

Un **cilindro** es un cuerpo redondo con dos bases congruentes y paralelas **(figura 30).**

Un **cono** es un cuerpo redondo con una base y un vértice **(figura 31).**

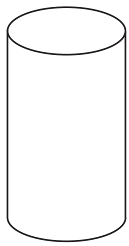


Figura 30

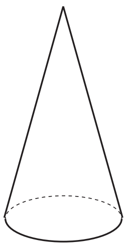


Figura 31

Una **esfera** es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado *centro* **(figura 32).**

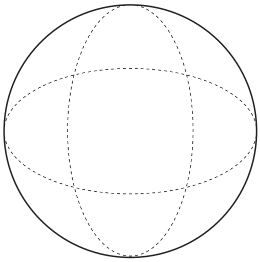


Figura 32

Acertijos

1. Una persona estaba verificando la fecha en la que había dado una conferencia de cuatro días hace un año. La hoja en su libro de anotaciones estaba rasgada y todo lo que quedaba de la fecha para la reunión era *bre 31*. ¿Cuál era el mes del primer día de la conferencia?

2. En Villa Lógica viven cuatro hombres: el Sr. Delgado, el Sr. Moreno, el Sr. Franco y el Sr. Rubio. Uno de ellos es delgado, otro moreno, otro franco y el otro rubio, pero ninguna de las características corresponden con su nombre. Un lógico intenta determinar quién es quién y obtiene la siguiente información parcialmente correcta:
   a. El Sr. Delgado es rubio.
   b. El Sr. Moreno es delgado.
   c. El Sr. Franco no es rubio.
   d. El Sr. Rubio no es franco.
   Si se sabe que tres de las cuatro proposiciones son falsas, ¿quién es el moreno?

3. Observe con cuidado las siguientes siete series de números y escriba las siguientes cinco series de la secuencia.

1
1 1
2 1
1 1 1 2
3 1 1 2
2 1 1 2 1 3
3 1 2 2 1 3

4. Un panadero recibe tres cajas: una de margarina en barra, otra de grasa para pan en barra y, la última, de grasa para pan y margarina. Cada una de las cajas están etiquetadas, pero el panadero recibe el aviso de que todas las etiquetas no corresponden a su contenido. ¿Cuál es el mínimo número de barras que tendrá que sacar el panadero para saber cuál es el contenido de cada caja?

5. Un expedicionario es capturado por una tribu de salvajes, cuyo jefe le hace la siguiente oferta: "Uno de estos dos caminos conduce a la muerte segura y el otro a la libertad. Puede seleccionar cualquier camino después de interrogar una sola vez a uno de estos dos guerreros. Le advierto que uno de ellos siempre dice la verdad y el otro siempre miente" ¿Qué pregunta debe hacer el expedicionario para salvarse de la muerte?

BIBLIOGRAFÍA

BRITTON, Jack R. & BELLO, Ignacio (1982). *Matemáticas contemporáneas* (2.ª ed.). México: Harla.

GORSKI, D. P., TAVANS, P. V. & otros (1970). *Lógica*. México: Grijalbo.

LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoría de conjuntos y temas afines: Teoría y 530 problemas resueltos*. México: McGraw-Hill. Serie Schaum.

LOVAGLIA, Florence, ELMORE, Merrit & CONWAY, Donald (1972). *Álgebra*. México: Harla.

MILLER D., Charles, HEEREN, Vern, & HORNSBY JR, E. John (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones* (8.ª Ed.). México: Pearson,. 1

MOISE, Edwin y DOWNS, F. (1970). *Geometría moderna*. México: Fondo Educativo Interamericano.

SMITH, Kart (1991). *Introducción a la lógica simbólica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Unidad 2

SISTEMAS NUMÉRICOS

Contenido

2.1 LOS NÚMEROS NATURALES

? Problema

Una persona ha olvidado la clave electrónica de su tarjeta débito. Recuerda que comienza por 4 y que los tres números restantes son 1, 7 y 9, pero no en ese orden.

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son todas las claves electrónicas que puede formar?
R/____
____
____
____
____
____

2. ¿Existe alguna fórmula matemática para averiguar cuántas claves podría obtener?
R/ ____
____
____
____
____
____
____

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Definición:

Un **sistema matemático** es un sistema que consta de tres partes:

1. Un conjunto de elementos
2. Una o más operaciones para combinar los elementos, y…
3. Una o más relaciones para comparar los elementos.

Definición:

Sea un conjunto S con dos operaciones o_1 y o_2. El sistema $\langle So_1, o_2\rangle$ es un **sistema numérico** cuando:

1. Cada una de las operaciones o_1 y o_2 es *conmutativa* y *asociativa*, y…
2. Una de las operaciones es distributiva con respecto a la otra.

Un **número** es un elemento del conjunto S en un sistema numérico.

Hay infinidad de sistemas numéricos. En esta unidad veremos los más usuales: los naturales, los enteros, los racionales y los reales.

Números naturales

El sistema de los números naturales, simbolizado por $\langle N, +, \cdot\rangle$, comprende los números
$\{1, 2, 3, 4…\}$

Cantidad discreta

La cantidad formada por objetos distintos pero de la misma especie se llama **discontinua** o **discreta** y se aprecia o evalúa *contando* los objetos de que está compuesta.

Por ejemplo: se cuentan los alumnos en un salón, los carros en un parqueadero, etc.

Propiedades de los números naturales

Sean a, b y c números naturales. El conjunto de los números naturales tiene las siguientes propiedades:

1. PROPIEDAD CLAUSURATIVA O CERRADURA

1.1 La suma de dos números naturales es un número natural. En símbolos: $\forall\ a, b \in N, a + b \in N$

1.2 El producto de dos números naturales es un número natural. En símbolos: $\forall\ a, b \in N, a \cdot b \in N$

Ejemplo 2.1.1

2 + 5 = 7 y 2, 5, y 7 son números naturales.
3 x 4 = 12 y 3, 4 y 12 son números naturales.

2. PROPIEDAD CONMUTATIVA

2.1 El orden de los sumandos no altera el total. En símbolos: $\forall\ a, b \in N, a + b = b + a$

2.2 El orden de los factores no altera el producto. En símbolos: $\forall\ a, b \in N, a \cdot b = b \cdot a$

Ejemplo 2.1.2

3 + 2 = 2 + 3 = 5, 10 + 15 = 15 + 10 = 25,
1020 + 80 = 80 + 1020 = 1100,
4 x 6 = 6 x 4 = 24, 12 x 15 = 15 x 12 = 180,
1200 x 100 = 100 x 1200 = 120 000.

3. PROPIEDAD ASOCIATIVA

3.1 El total de una suma no varía por la manera en que se agrupen los sumandos. En símbolos:
$\forall\ a, b, c \in N, a + (b + c) = (a + b) + c$

3.2 El producto de una multiplicación no varía por la manera en que se agrupen los factores. En símbolos:
$\forall\ a, b, c \in N, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Ejemplo 2.1.3

4 + (6 + 9) = (4 + 6) + 9 ⇒ 4 + 15 = 10 + 9 ⇒ 19 = 19.
5 x (2 x 4) = (5 x 2) x 4 ⇒ 5 x 8 = 10 x 4 ⇒ 40 = 40.

4. PROPIEDAD MODULATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN

Al multiplicar un número natural por el uno, se obtiene el mismo número natural. En símbolos: $\forall\ a \in N, \exists\, 1 \in N / a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Ejemplo 2.1.4

6 x 1 = 1 x 6 = 6, 8 x 1 = 1 x 8 = 8, 124 x 1 = 1 x 124 = 124.

5. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

> Para multiplicar una suma indicada por un número, se multiplica cada uno de los sumandos por el número y se suman los productos parciales. Es decir, la multiplicación se distribuye sobre la suma. En símbolos: $\forall\ a, b, c \in N, a\,(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo 2.1.5

8 x (3 + 7) = (8 x 3) + (8 x 7) = 24 + 56 = 80.
$3\,(5 + a) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot a = 15 + 3a$.

Ejemplo 2.1.6

Determine si el conjunto $A = \{1, 2\}$ es cerrado con respecto a la suma:

+	**1**	**2**
1	2	3
2	3	4

Solución:

El conjunto A no es cerrado con respecto a la suma porque el 3 y el 4 no pertenecen al conjunto A.

Ejemplo 2.1.7

Determine si el conjunto B = {1, 3} es cerrado con respecto a la multiplicación:

·	**1**	**3**
1	1	3
3	3	9

Solución:

El conjunto B no es cerrado porque no cumple la propiedad clausurativa, esto es, $3.3 = 9$ y $9 \notin B$.

Ejemplo 2.1.8

El siguiente es un rompecabezas numérico, compuesto por ocho números y una casilla vacía. Para desplazarlas de una casilla a otra han de pasar por la única casilla vacía del tablero. ¿Es posible a partir de la configuración *a* armar el rompecabezas, es decir, llevarlo a la configuración *b*?

5	3	1
2	8	4
6	7	

Configuración *a*

1	2	3
4	5	6
7	8	

Solución:

Para determinar si se puede armar el rompecabezas a partir de la configuración *a*, buscamos un invariante del desplazamiento de las piezas. Yendo de izquierda a derecha, la sucesión de los números de dicha configuración es: 5, 3, 1, 2, 8, 4, 6, 7. Calculamos ahora el número de inversiones de esta secuencia, es decir, el número de veces en que cada cifra precede a otras de menor valor: (5, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 4), (3, 1), (3, 2), (8, 4), (8, 6), (8, 7), un total de 9 inversiones. Debido a que el número de inversiones de la configuración *b* deseada es 0, o sea, par, y el número de inversiones de la configuración *a* es impar, no se puede armar el rompecabezas a partir de la configuración *a*.

Los números naturales surgieron de la necesidad de contar, por lo que existe el teorema fundamental del conteo:

Teorema fundamental del conteo

> Cuando una tarea consiste en k fases separadas, si la primera puede realizarse en n_1 formas, la segunda en n_2 formas, etc., hasta la k-ésima fase, que puede hacerse de n_k formas, entonces el número total de resultados posibles para completar la tarea está dado por el producto
>
> $$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$$

Ejemplo 2.1.9

¿Cuántos claves electrónicas de cuatro dígitos para tarjetas débito se pueden obtener si se admiten repeticiones? Dé cinco ejemplos de tales claves.

Solución:

Los dígitos que se escogen son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, o sea, diez dígitos.

Como las claves tienen cuatro dígitos y se admiten repeticiones (el dígito se puede repetir), ejemplos de claves son: 1458, 7750, 0159, 5881 y 1980.

Para saber cuántas claves se pueden formar, se colocan las cuatro casillas:

______	______	______	______
1.er díg.	2.o díg.	3.er díg	4.o díg.

En el primer dígito se puede colocar cualquier dígito del 0 al 9, o sea, de diez maneras posibles. Como un dígito se puede repetir, entonces en cada casilla se puede colocar cualquiera de los diez dígitos. Por lo tanto, por el teorema fundamental del conteo:

__10__	__10__	__10__	__10__	= 10 000 claves.
1.er díg.	2.o díg.	3.er díg	4.o díg.	

Ejemplo 2.1.10

Con los dígitos 0, 2, 3 y 8 ¿cuáles son los números impares de tres cifras que se pueden formar si no se admiten repeticiones de los dígitos? Aplique el teorema fundamental del conteo para verificar la cantidad de los números impares.

Solución:

El cero a la izquierda no cuenta, por lo tanto la primera cifra sólo puede ser 2 u 8, pues el 3 es la última cifra dado que el número debe ser impar. Por lo tanto, los números impares son: 203, 283, 803 y 823. Ahora aplique el teorema fundamental del conteo para verificar si efectivamente son cuatro los números obtenidos:

La última cifra debe ser el 3 puesto que existe sólo una manera de escogerlo porque el número es impar.

La primera cifra no puede ser cero y por eso quedan para escoger el 8 y el 2, o sea, dos maneras de seleccionar un número.

La segunda cifra se puede escoger de dos formas posibles, porque aunque hay un dígito menos (pues se escogió uno para la primera cifra), el cero sí puede estar en la segunda cifra. Por lo tanto, por el teorema fundamental del conteo:

$$\underset{1.^{\text{er}}\text{ díg.}}{\underline{\;\;2\;\;}}\quad \underset{2.^{\text{o}}\text{ díg.}}{\underline{\;\;2\;\;}}\quad \underset{3.^{\text{er}}\text{ díg}}{\underline{\;\;1\;\;}}\quad = 4 \text{ números}$$

Aplicaciones

1. Una compañía tiene tres secretarias y seis vendedores. Si cada uno de ellos gana $600.000 mensuales, calcule el monto de la nómina mensual de varias maneras y especifique qué propiedades garantizan que el resultado es el mismo.

2. Un tendero observó que un estante tenía cuatro anaqueles con latas de sardinas, cada uno de los cuales constaba de cinco hileras de tres latas. Contó las que había en cada fila (3) y el número de filas (5) y dedujo que tenía 15 latas por anaquel. Después multiplicó el resultado por el número de anaqueles para obtener el número total de latas de sardina. Su hijo se percató de que había cuatro anaqueles, cada uno con cinco filas. Luego multiplicó el resultado por el número de latas en una fila y obtuvo el número total de latas de sardinas. ¿Cuál de las propiedades garantizan que el resultado es el mismo? Haga un diagrama del problema.

3. Determine si a partir de las siguientes dos configuraciones se puede armar el rompecabezas numérico:

2	5	1
7	6	8
3	4	

Configuración *a*

7	1	5
6	8	4
3	2	

Configuración *b*

4. Existen figuras que se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel ni repetir el segmento, es decir, cruzar el segmento exactamente una vez. Para saber si una figura se puede dibujar de un solo trazo, debe tener en cuenta lo siguiente:

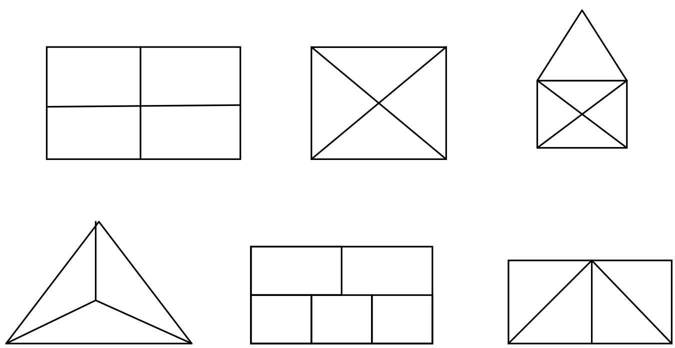
Un vértice es par si de él parten un número par de caminos.

La figura no se puede dibujar de un solo trazo, sin repetir segmento, si hay más de dos vértices impares en la figura.

La figura se puede dibujar de un solo trazo, sin repetir segmento, si:

- **a.** Todos los vértices son pares. En este caso el punto de partida puede ser cualquiera.
- **b.** No hay más de dos vértices impares. En este caso el recorrido comienza por uno de ellos y termina en el otro.

Aplique los criterios anteriores para determinar cuáles de las siguientes figuras se pueden dibujar de un solo trazo y sin repetir segmento, y cuáles no. Indique la secuencia para dibujar las que sí se puedan dibujar con los requisitos establecidos:



5. Las claves para tarjetas débito, tienen cuatro dígitos. ¿Cuáles son las claves que se pueden formar con los dígitos {1, 3, 6, 8} si no se admiten repeticiones de los dígitos en una sola clave?

6. ¿Cuáles son los números pares de tres cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 5 y 8 si no se admiten repeticiones de los dígitos en un mismo número?

7. ¿Cuáles son los números impares de tres cifras que se pueden formar con los dígitos 0, 2, 3 y 7 si no se admiten repeticiones de los dígitos en un mismo número?

8. ¿Cuáles son los números de cuatro cifras que se pueden formar con los dígitos 0, 5, 6 y 9 si no se admiten repeticiones de los dígitos en un mismo número?

9. ¿Cuántos números pares de cuatro dígitos se pueden conformar con los dígitos 0, 3, 4, 7, 8 y 9 si no se admiten repeticiones? Cite cuatro de tales números.

10. ¿Cuántos números divisibles entre 3 de tres cifras se pueden se pueden formar con los dígitos 0, 1, 3, 6 y 7 si no se admiten repeticiones? ¿Cuáles son esos números?

11. ¿Cuántas claves electrónicas de tarjetas débito de cuatro dígitos se pueden formar con todos los dígitos si no se admiten repeticiones de los dígitos? Cite cuatro ejemplos de tales claves.

12. ¿Cuántas placas para carros se pueden formar si estas se componen de tres letras y tres números, ambas con repetición? Cite cuatro ejemplos de tales placas.

13. ¿Cuáles son todos los resultados posibles que se obtienen al lanzar tres monedas?

14. ¿Cuáles son todos los resultados posibles que se obtienen al lanzar un dado de cuatro caras si se considera el número que queda oculto? Dibuje en el espacio un dado de cuatro caras. ¿Cómo se vería el molde en cartulina para hacerlo?

15. ¿Cuáles son todos los resultados posibles que se obtienen al lanzar dos dados de cuatro caras cada uno, si se considera el número que queda oculto?

16. Acomode las siguientes tarjetas para formar los nombres de seis pescados. Cada tarjeta se usa sólo una vez:

RA	CH	SA	RO
OA	ÑA	ON	UC
LM	UN	TR	AN
PI	HA	AT	ME

17. ¿Cuáles son las 36 palabras de cinco letras que se pueden obtener de la siguiente cruz si se admite que las cinco letras estén en contacto por los lados y los vértices de cada casilla? Se admiten repeticiones. Un ejemplo de las 36 palabras es *ágata*.

	T	**E**	
A	**M**	**N**	**R**
S	**G**	**L**	**O**
	I	**C**	

18. En una ciudad cuadriculada, como lo muestra la **figura 31,** ¿cuáles son los diferentes recorridos que un carro puede hacer de O a A si en todas las calles se circula en una sola dirección y los únicos caminos a seguir son hacia la cuadrícula de la derecha y hacia la cuadrícula de arriba?

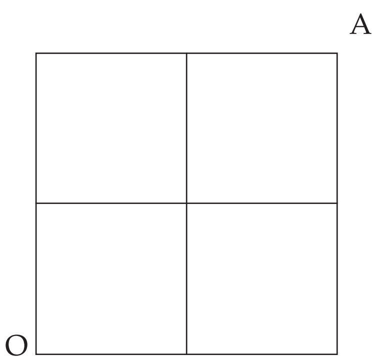


Figura 31

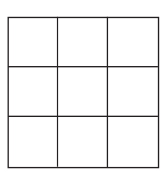


Figura 32

19. ¿Cuántos cuadrados hay en la **figura 31**? Explique.

20. ¿Cuántos cuadrados hay en la **figura 32**? Explique.

Ejercicios 2.1

Determine si los conjuntos 1-3 son cerrados o no con respecto a la operación especificada. Justifique su respuesta.

1. $\langle D, +\rangle$, con $D = \{1, 2, 3\}$

+	**1**	**2**	**3**
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	6	6

2. $\langle E, +\rangle$, con $D = \{1, 10\}$

+	**1**	**10**
1	2	11
10	11	20

3. $\langle F, \cdot\rangle$, con $F = \{2, 4\}$

·	**2**	**4**
2	4	8
4	8	16

4. ¿Es el conjunto de los números naturales cerrado con respecto a la resta? Explique.

5. ¿Por qué el conjunto de los números naturales junto con las operaciones *suma* y *multiplicación* conforman un sistema numérico?

Describa los elementos de los conjuntos 6-10 y represéntelos en la recta numérica:

6. $A = \{x/x$ es un número deficiente, $2 \leq x \leq 8$, $x \in \mathrm{N}\}$
7. $B = \{x/x$ es un número primo, $4 < x \leq 9$, $x \in \mathrm{N}\}$
8. $C = \{x/x$ es divisible entre 2, $-4 \leq x \leq 0$, $x \in \mathrm{N}\}$
9. $D = \{x/x$ es un número abundante, $6 < x < 13$, $x \in \mathrm{N}\}$
10. $E = \{x/x$ es un número compuesto, $10 \leq x < 14$, $x \in \mathrm{N}\}$

2.2 LOS NÚMEROS ENTEROS

? Problema

La **longitud** es la distancia en grados que hay desde un punto cualquiera al meridiano de referencia. Va desde 0 grados hasta 180 grados en el sentido oriental y desde 0 grados hasta 180 grados en el sentido occidental. Se mide sobre el Ecuador y puede ser oriental u occidental. La mayor importancia de la longitud, fuera de la ubicación precisa, es la *determinación de la hora y de la fecha internacional.*

Como para recorrer los 360 grados de un paralelo se requieren 24 horas, para recorrer 15 grados se requiere una hora. Si inicia en el grado 0 a la hora 0, en el grado 15 de longitud oriental será la 1, en el grado 30 serán las 2 y así sucesivamente; en cambio, en el grado 15 de longitud occidental será la hora 23, en el grado 30 las 22 y así sucesivamente.

El cambio de fecha se determina en el grado 180 que queda en el océano Pacífico. Para la determinación de la hora y de la fecha internacional se parte del meridiano inicial, o sea, el de Greenwich (en inmediaciones de Londres), que es el grado 0. El **cuadro 1** muestra la longitud aproximada de algunas ciudades:

Cuadro n.º 1

Ciudad (país)	**Longitud**
Bogotá (Colombia)	75º Oeste
Buenos Aires (Argentina)	60º Oeste
Nueva York (EE. UU.)	75º Oeste
Alice Spring (Australia)	135º Este
Isla Canarias (España)	15º Oeste
Bagdad (Irak)	45º Este

Continúa...

Guatemala (Guatemala)	90º Oeste
Los Ángeles (EE. UU.)	120º Oeste
Roma (Italia)	15º Este
Nueva Delhi (India)	75º Este
Belo Horizonte (Brazil)	45º Oeste
Guadalajara (México)	105º Oeste
Islas Azores (Portugal)	30º Oeste
White Horse (Canadá)	135º Oeste
Ankara (Turquía), El Cairo (Egipto)	30º Este
Zahedón (Irán)	60º Este
Manila (Filipinas)	120º Este
(Bangkok) Tailandia	105º Este
Lhasa (China)	90º Este

Responda las siguientes preguntas:

1. Organice en una recta real la diferencia horaria de las diferentes ciudades reseñadas en el cuadro 1.
R/____

2. Si en Bogotá son las 3:00 p.m., ¿qué hora es en Roma? ¿Y en Los Ángeles? ¿Y en Bangkok?
R/ ____

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Números enteros

El sistema de los números enteros, simbolizado por $\langle Z, +, \cdot \rangle$ comprende de los números $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\ldots\}$

El sistema de los números enteros, además de cumplir con las cinco propiedades (clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa para la suma y distributiva) que tienen los números naturales para la adición, también verifican otras propiedades.

La existencia del cero en los números enteros hace que la propiedad modulativa se extienda a la suma:

6. Propiedad modulativa de la multiplicación

Al sumar un número entero con el cero, se obtiene el mismo número entero. En símbolos:
$\forall\, a \in Z, \exists\, 0 \in Z / a + 0 = 0 + a = a$

Ejemplo 2.2.1

$-2 + 0 = -2,\qquad -25 + 0 = -25,\qquad 279 + 0 = 279$

Y una propiedad adicional para la adición:

7. Propiedad del inverso aditivo

Al sumar un número entero con su opuesto aditivo, el total es cero (0). En símbolos:
$\forall\, a \in Z, \exists\, (-a) \in Z / a + (-a) = (-a) + a = 0$

Ejemplo 2.2.2

$3 + (-3) = 0$, $65 + (-65) = 0$, $489 + (-489) = 0$

Ejemplo 2.2.3

Determine si el conjunto $A = \{0,1\}$ es un cerrado respecto a la suma:

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	2

Solución:

El conjunto A no es cerrado con respecto a la suma porque $2 \notin A$.

Ejemplo 2.2.4

Determine si el conjunto $A = \{0, 1\}$ es cerrado respecto a la multiplicación:

·	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

Solución:

El conjunto A es cerrado con respecto a la multiplicación porque todos los productos entre 0 y 1 son 0 y 1 y estos pertenecen al conjunto A.

Además de las seis (6) propiedades reseñadas anteriormente, existen otras propiedades que son demostrables. Esas propiedades se denominan **teoremas**. Un **teorema** es una proposición que debe ser demostrada; consta de hipótesis (lo que se conoce), tesis (lo que se desea demostrar) y la demostración. En este libro no se demostrarán los teoremas, sólo se aplicarán en la solución de los ejercicios.

Algunos de los teoremas que se van a utilizar son los siguientes:

Teorema 1

Propiedad uniforme aditiva: Si a ambos miembros de una igualdad se le suma una misma cantidad, la igualdad no varía. En símbolos: Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$

Ejemplo 2.2.5

Si 3 = 3, entonces 3 + 8 = 3 + 8, o sea, 11 = 11, la igualdad se mantiene.

Teorema 2

Propiedad uniforme multiplicativa: Si a ambos miembros de una igualdad se le multiplica una misma cantidad, la igualdad no varía. En símbolos: Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$

Ejemplo 2.2.6

Si 25 = 25 entonces 25 x 2 = 25 x 2, o sea, 50 = 50, la igualdad se mantiene.

Teorema 3

Propiedad anulativa: Al multiplicar cualquier número por cero, el producto es cero. En símbolos: $a \cdot 0 = 0$

Ejemplo 2.2.7

5 x 0 = 0,   -58 x 0 = 0,   389 x 0 = 0.

El siguiente ejemplo muestra cómo se aplican las propiedades para deducir que más por menos es menos:

Ejemplo 2.2.8

¿Por qué $4(-5) = -20$?

Solución:

La siguiente respuesta no es una demostración porque no se generaliza para cualquier número entero, sólo responde a la pregunta planteada de manera deductiva:

1. $4 \cdot 0 = 4 \cdot 0$	**Toda cantidad es igual a sí misma.**
2. $4[5+(-5)]=4 \cdot 0$	**Propiedad del inverso aditivo**
3. $4 \cdot 5+4(-5)=4 \cdot 0$	**Propiedad distributiva.**
4. $4 \cdot 5+4(-5)=0$	**Propiedad anulativa.**
5. $20+4(-5)=0$	**Propiedad clausurativa.**
6. $20+(-20)+4(-5)=0+(-20)$	**Propiedad uniforme aditiva.**
7. $[20+(-20)]+4(-5)=0+(-20)$	**Propiedad asociativa.**
8. $0+4(-5)=0+(-20)$	**Propiedad del inverso aditivo.**
9. $4(-5)=-20$	**Propiedad modulativa de la suma.**

Ejemplo 2.2.9

Obtenga el valor de x utilizando las propiedades de los números en la ecuación $4 - (2 - x) = 12$

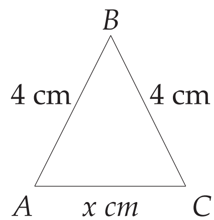
Solución:

1. $4-(2-x)=12$	**Dado.**
2. $4-2+x=12$	**Propiedad distributiva.**
3. $2+x=12$	**Propiedad clausurativa.**
4. $2+(-2)+x=12+(-2)$	**Propiedad uniforme aditiva.**
5. $[2+(-2)]+x=12+(-2)$	**Propiedad asociativa.**
6. $0+x=12+(-2)$	**Propiedad del inverso aditivo.**
7. $x=12+(-2)$	**Propiedad modulativa de la suma.**
8. $x=10$	**Propiedad clausurativa.**

Ejemplo 2.2.10

El $\triangle\, ABC$ es isósceles, con AB=BC= 4 cm y AC=x cm. Si AC se incrementa en 2 cm, el perímetro del $\triangle\, ABC$ será de 15 cm. ¿Cuál era la medida inicial de $\overline{AC}$? Especifique las propiedades empleadas para responder a la pregunta.

Solución:



1. $4 + 4 + x + 2 = 15$	**Definición de perímetro.**
2. $10 + x = 15$	**Propiedad clausurativa.**
3. $10 + (-10) + x = 15 + (-10)$	**Propiedad uniforme aditiva.**
4. $0 + x = 15 + (-10)$	**Propiedad inverso aditivo.**
5. $x = 15 + (-10)$	**Propiedad modulativa de la suma.**
6. $x = 5$	**Propiedad clausurativa.**

Por lo tanto, el lado $\overline{AC}$ medía inicialmente 5 cm.

Aplicaciones

1. Las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit están relacionadas de tal forma que a un aumento de 5ºC le corresponde un aumento de 9ºF o a una disminución de 5ºC le corresponde una disminución de 9ºF. El punto de congelación del agua es de 0ºC ó 32ºF y el punto de ebullición de 100ºC ó 212ºF. Para responder a cada una de las siguientes preguntas, dibuje la recta real con una escala adecuada.

a. ¿Qué temperatura en la escala Fahrenheit le corresponde a una temperatura de -25ºC?
b. ¿Qué temperatura en la escala Celsius le corresponde a una temperatura de 77ºF?
c. ¿Qué temperatura en la escala Fahrenheit le corresponde a una temperatura de 30ºC?
d. ¿Qué temperatura en la escala Celsius le corresponde a una temperatura de -13º F?

2. Las escalas de temperatura Celsius y Kelvin están relacionadas de tal forma que a un aumento de 1ºC le corresponde un aumento de 1ºK o a una disminución de 1ºC le corresponde una disminución de 1ºK. El punto de congelación del agua es de 0ºC o 273ºK. Para responder a cada una de las siguientes preguntas, dibuje la recta real con una escala adecuada.
a. ¿Qué temperatura en la escala Kelvin le corresponde a una temperatura de -5ºC?
b. ¿Qué temperatura en la escala Celsius le corresponde a una temperatura de 275ºK?
c. ¿Qué temperatura en la escala Kelvin le corresponde a una temperatura de 4ºC?
d. ¿Qué temperatura en la escala Celsius le corresponde a una temperatura de 268ºK?

3. En el $\triangle$ *DEF*, *DE*=5 cm, *EF*= 6 cm y *DF*=*x* cm. Si *DF* se incrementa en 4 cm, el perímetro del $\triangle$ *DEF* será de 17 cm. ¿Cuál era la medida inicial de $\overline{\mathrm{DF}}$? ¿Qué tipo de triángulo es el $\triangle$ *DEF* antes y después del incremento de *DF*? Especifique las propiedades empleadas para responder a la pregunta.

4. En el $\triangle$ *MNO*, *MN*=*NO*=8 cm, y *MO*=*x* cm. Si *MO* se incrementa en 5 cm, el perímetro del $\triangle$ *MNO* será de 24 cm. ¿Cuál era la medida inicial de *MO*? ¿Qué tipo de triángulo es el $\triangle$ *MNO* antes y después del incremento de *MO*? Especifique las propiedades empleadas para responder a la pregunta.

5. Para que un cuadrilátero sea un paralelogramo, los lados opuestos deben ser congruentes. Determine el valor de *x* para que el cuadrilátero *ABCD*, con *AB*=*CD*=6 cm, *BC*=(2x+4) cm y *AD*=(x+5) cm sea un paralelogramo. Especifique las propiedades aplicadas para responder a la pregunta. ¿Qué tipo de paralelogramo resultó?

6. En el trapecio *PQRS* con $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$, *PQ*=($x$+3) cm, *RS*=(2$x$+1) cm, *QR*= 6cm y *PS*=8 cm. Determine el valor de x para que el trapecio *PQRS* sea isósceles. Especifique las propiedades aplicadas para responder a la pregunta.

7. En una ciudad determinada, la temperatura disminuyó 8^{o}C por una lluvia repentina y luego subió 6^{o}C por la reaparición del sol. Si la última temperatura es de 37^{o}C, ¿cuál era la temperatura inicial? Especifique las propiedades aplicadas para responder a la pregunta.

8. Usted fue a jugar a la ruleta tres veces en un casino. En la primera, perdió $3000, en la segunda ganó $4000 y en la tercera perdió $2000. ¿Terminó ganando o perdiendo dinero? Justifique su respuesta.

9. En la siguiente recta, coloque los números del -7 al 10.

Una persona comienza su paseo en el cero (0). En cada ocasión, antes de decidir en qué sentido dará el paso siguiente, la persona lanza una moneda: si sale cara dará un paso a la derecha; si sale sello, un paso a la izquierda. La caminata termina cuando la persona llega al -7 o al 10. ¿Dónde terminará la caminata? Explique su respuesta.

10. Dos personas, A y B, deciden realizar el siguiente juego: El jugador A comienza con un capital de $7000, y el jugador B, con $10000. Van apostando sistemáticamente a “cara o sello”. Cuando sale cara, B le paga $1000 a A; por cada sello, A le paga $1000 a B. El juego termina cuando uno de los dos jugadores se queda sin dinero. ¿Quién ganará el juego?

Ejercicios 2.2

1. ¿Es el conjunto de los números enteros, junto con las operaciones suma y multiplicación, un sistema numérico? Explique.

2. ¿Es el conjunto de los números enteros cerrado con respecto a la división? Justifique.

3. ¿Es la resta en los enteros una operación conmutativa? ¿Por qué?

En las expresiones 4-10 obtenga el valor de la variable x aplicando las propiedades pertinentes:

4. $x - 20 = 15$
5. $2x - (6 + x) = -10$
6. $3x - (45 + 2x) = 60$
7. $-5x - (-75 - 6x) = 120$
8. $8x - (-20 + 7x) = 14$
9. $10x - (9x + 27) = 21$
10. $-20x - (40 - 21x) = 100$

Describa los elementos de los conjuntos 11-15 y represéntelos en la recta numérica:

11. $A = \{x/x$ es primo o compuesto, $2 \leq x \leq 5,\ x \in Z\}$
12. $B = \{x/x$ es par o impar, $3 < x \leq 8,\ x \in Z\}$
13. $C = \{x/0 < x < 1,\ x \in Z\}$
14. $D = \{x/-2 < x < 4,\ x \in Z\}$
15. $E = \{x/-4 \leq x < 2,\ x \in Z\}$

2.3 LOS NÚMEROS RACIONALES

Problema

Las pinturas vienen envasadas en varias presentaciones: 1 cuñete (5 galones), l balde (½ cuñete), un galón, medio, un cuarto, un octavo, un dieciseisavo y un treintaidosavo de galón.

Responda las siguientes preguntas:

1. Usted compró por equivocación un dieciseisavo de galón, pero lo que necesitaba era medio galón. ¿Qué cantidad de pintura deberá comprar para completar el faltante? Escriba todas las operaciones efectuadas para responder a la pregunta.
R/

2. ¿Cuántas veces cabe un treintaidosavo en un cuarto? Explique.
R/

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Cantidad continua

La cantidad formada de un todo sin distinción de partes se llama **continua** y se aprecia midiéndola, para lo cual hay que compararla con otra cantidad conocida y de la misma especie.

Por ejemplo, se mide la altura de una pared, el peso de un objeto, la capacidad de un balde, etc.

Números racionales

Los números racionales, denotados por Q, son

$$Q = \{x / x = \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}.$$

Esto nos dice que la división por cero no está definida.

Los números racionales, además de cumplir todas las propiedades que tienen los números enteros, también verifican la siguiente propiedad:

8. Propiedad del inverso multiplicativo

El producto de todo número racional con su inverso multiplicativo es uno. En símbolos:

$$\forall\, a \in Q,\ \exists\, \frac{1}{a} \in Q \,/\, a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Ejemplo 2.3.1

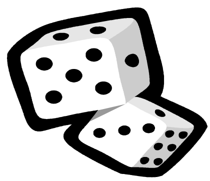
$8 \cdot \frac{1}{8} = 1$, $\quad -34 \cdot \frac{1}{-34} = 1$, $\quad 120 \cdot \frac{1}{120} = 1$, $\quad -1789 \cdot \frac{1}{-1789} = 1$

Ejemplo 2.3.2

La **probabilidad** de un evento *A* se define como la razón del número de resultados favorables del evento *A* y el número total de resultados posibles del evento *A*. A este último conjunto se le llama *espacio muestral* y usualmente se simboliza con la letra *S*. En símbolos:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Calcule la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de los números obtenidos sea cinco.



Solución:

Sea el evento *A: la suma de los números obtenidos al lanzar dos dados es cinco.* Debemos calcular *P(A)*.

El número de puntos del espacio muestral es por el teorema fundamental del conteo: 6 x 6 = 36, porque cada dado tiene seis caras y son dos dados. Luego *n(S)*=36. De esas 36 posibilidades, las parejas cuyos componentes suman cinco son cuatro: (1, 4), (4, 1), (2, 3) y (3, 2). Por lo tanto:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}111$$

Lo anterior quiere decir que en 1 de 9 lanzamientos de un par de dados, la suma de los números obtenidos es cinco. Algunas veces la probabilidad se da como razón y en otras ocasiones como número decimal.

Interpretación: de 100 lanzamientos de un par de dados, aproximadamente en 11 ó 12 veces la suma de los números obtenidos es cinco.

Ejemplo 2.3.3

En una taza estándar cabe un cuarto de litro de agua. ¿Cuántas tazas de agua se deben echar para llenar una botella de un litro y medio?

Solución:

Planteamos una **regla de tres simple directa**:

$$1 \text{ taza} \text{ -----------} \ \frac{1}{4}\mathrm{l}$$

$$X \text{ ------------ } 1{,}5\, l$$

De donde: $X = \dfrac{1{,}5\,\mathrm{l} \cdot 1 \text{ taza}}{\frac{1}{4}\,\mathrm{l}} = 6 \text{ tazas}$.

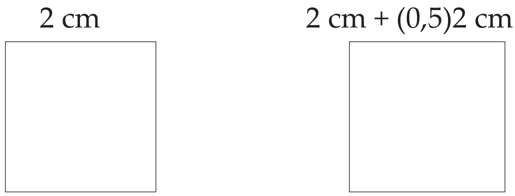
Para llenar la botella de litro y medio se deben echar 6 tazas de agua.

Ejemplo 2.3.4

El símbolo %, que se lee **por ciento,** se utiliza con frecuencia para indicar la división de un número entre 100.

Una placa metálica cuadrada tiene 2 cm de longitud. Por acción del calor, la placa se ha dilatado de tal forma que el lado aumentó un 5%. ¿Cuál es el área de la placa dilatada?

Solución:



Como el lado de la placa aumentó un 5%, se debe calcular el 5% de 2 y sumárselo:

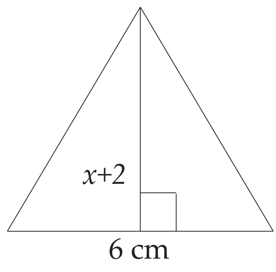
2 x 5%=0,1 entonces la longitud del lado de la placa dilatada es (2 + 0,1) cm= 2,1 cm.

El área de un cuadrado es (lado)^2, luego: $A = (2{,}1)^2 = 4{,}41\text{cm}^2$.
El área de la placa dilatada es 4,41 cm^2.

Ejemplo 2.3.5

El área de un triángulo es 18 cm^2, la base mide 6 cm y su altura (x+2) cm. Determine el valor de la altura del triángulo. Especifique las propiedades aplicadas.

Solución:



1. $\dfrac{6(x+2)}{2} = 18$ **Fórmula del área de un triángulo.**

2. $\left(\dfrac{6}{2}\right)(x+2) = 18$ **Propiedad asociativa.**

3. $3(x+2)=18$ **Propiedad clausurativa.**

4. $\frac{1}{3}\cdot 3(x+2)=\frac{1}{3}\cdot 18$ **Propiedad uniforme de la multiplicación.**

5. $\left(\frac{1}{3}\cdot 3\right)(x+2)=\frac{1}{3}\cdot 18$ **Propiedad asociativa.**

6. $1(x+2)=\frac{1}{3}\cdot 18$ **Propiedad del inverso multiplicativo.**

7. $x+2=\frac{1}{3}\cdot 18$ **Propiedad modulativa de la multiplicación.**

8. $x+2=6$ **Propiedad clausurativa.**

9. $x+2+(-2)=6+(-2)$ **Propiedad uniforme de la adición.**

10. $x+0=6+(-2)$ **Propiedad del inverso aditivo.**

11. $x=6+(-2)$ **Propiedad modulativa de la suma.**

12. $x=4$ **Propiedad clausurativa.**

Luego la altura del triángulo mide (4+2) cm = 6 cm.

Aplicaciones

1. Un mecánico tiene un juego de llaves para tuercas que van de $\frac{1}{2}$ de pulgada hasta $1\frac{1}{2}$ de pulgada, variando la medida cada $\frac{1}{16}$ de pulgada.

a. Si una llave de $\frac{1}{2}$ pulgada es demasiado pequeña y la de $\frac{5}{8}$ de pulgada es demasiado grande para una cierta tuerca, ¿qué tamaño de llave se necesita para este caso?

b. Cuando una llave de $\frac{3}{4}$ de pulgada es demasiado pequeña y una de $\frac{7}{8}$ es demasiado grande, ¿qué tamaño se requiere?

c. Para apretar una cierta tuerca, la llave de $1\frac{1}{4}$ de pulgada es demasiado grande y la de $1\frac{1}{8}$ de pulgada es demasiado pequeña. ¿Qué tamaño de llave se necesita?

d. ¿Qué tamaño de llave se necesita para apretar una tuerca, sabiendo que la de $1\frac{3}{8}$ de pulgada es demasiado grande y la de $1\frac{1}{4}$ de pulgada es demasiado pequeña?

2. Un estuche tiene trece brocas para taladro, cuyos calibres van desde ¼ hasta ½ de pulgada. Si el calibre de las barrenas se incrementan en un número constante, ¿cuál es el calibre de las tres brocas restantes? Represéntelas en la recta real.

3. Una escalera tiene nueve peldaños que disminuyen uniformemente de 24 pulgadas en la base hasta 18 pulgadas en la parte superior. Calcule la longitud de los siete escalones intermedios.

4. Ana se comió un octavo de pudín; Berta, tres octavos; y Carmen, un cuarto. ¿Cuánto le quedó a Diana?

5. Dos ciudades se encuentran a 240 Km de distancia. Un comerciante recorre un día $^1/_6$ de esa distancia, otro día ¼ y el tercer día $^1/_8$ de la misma. ¿Qué distancia le falta por recorrer?

6. Edna compró tres bolsas de naranjas, cada una con tres docenas de naranjas. Obsequió el contenido total de una bolsa y tres cuartos de otra a su mamá, y media bolsa de otra a su hermana. ¿Con cuántas naranjas se quedó?

7. Al morir, un granjero heredó 17 caballos para repartirlos entre sus tres hijos. Al mayor le corresponde la mitad de los caballos; al segundo, la tercera parte, y al menor, la novena parte. El juez que se encargó del reparto sumó su caballo a los 17 que había dejado al granjero y los repartió según el testamento. ¿Perdió el juez su caballo en el reparto? Justifique.

8. El padre de dos hijos tiene una finca cuadrada de un kilómetro de lado. De ese terreno, le cede a un hijo un lote rectangular que mide ¾ de Km de longitud y ½ Km de anchura, y al otro hijo el resto. ¿Qué fracción de un Km^2 representa el terreno del primer hijo? ¿A cuál le tocó el mayor terreno?

9. Recorte en cartulina doce cuadrados de 3cm de lado. Si los doce cuadrados es la unidad, ¿cuántos cuadrados son ¾ de $^1/_3$?

¿cómo se interpreta con los cuadrados ½ entre ¼? Argumente sus respuestas.

10. El piso de un cuarto rectangular mide $^7/_2$ por 4 metros. Si el piso se va a embaldosinar con un mosaico de 30 por 30 cm, ¿cuántos metros cuadrados de mosaico se debe comprar? ¿cuántas baldosas cubrirán el piso?

11. ¿Cuántas vueltas deben darse a un tornillo de 1 ½ pulgada para que penetre totalmente en un tablón si en cada vuelta penetra $^3/_{16}$ de pulgada?

12. Usted cogió ¾ de $^2/_3$ de litro de agua y lo vació en un recipiente con capacidad de $^1/_6$ de litro. ¿Cupo toda el agua en el recipiente de $^1/_6$ de litro?

13. Usted cogió ¾ de $^2/_9$ de galón de agua y lo vació en un recipiente con capacidad de ¼ de galón de agua. ¿Cupo toda el agua en el recipiente de ¼ de galón? Especifique las operaciones que debe realizar para responder a la pregunta y justifíquelas. Si cupo toda el agua, ¿qué fracción del recipiente queda vacio? ¿Qué fracción del recipiente queda lleno de agua? Si no cupo toda el agua, ¿qué fracción de galón de agua no cabe en el recipiente? ¿Qué fracción cabe en el recipiente?

14. Se lanzan dos dados. Calcule la probabilidad (interprete el resultado) de que:

a. Los dos números obtenidos sean pares.
b. Los dos números obtenidos sean primos.
c. La suma de los números obtenidos sea múltiplo de 3.
d. La suma de los números obtenidos sea divisible entre 6.
e. El producto de los números obtenidos sea menor o igual que 15.

15. Lance un dado doce veces o dos dados seis veces y llene la siguiente tabla:

n.º	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1		
2		
3		
4		
5		
6		

La frecuencia absoluta es el número de veces que obtuvo una cara del dado y la frecuencia relativa es la razón de la frecuencia absoluta y el número total de lanzamientos.

La suma de todas las frecuencias absolutas debe dar el número total de lanzamientos y la suma de todas las frecuencias relativas debe ser 1. A la frecuencia relativa se le denomina **probabilidad empírica.**

La probabilidad teórica de que se obtenga un número al lanzar un dado es $^1/_6$. ¿Coincide este valor con la probabilidad empírica obtenida en el experimento? Explique.

16. Se lanzan tres monedas. Calcule la probabilidad (interprete el resultado) de que
   a. Se obtenga una cara.
   b. Se obtengan dos sellos.
   c. Se obtengan tres caras.

17. Lance una moneda seis veces y llene la siguiente tabla:

Resultado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Cara		
Sello		

La probabilidad teórica de obtener cara al lanzar una moneda es ½ y la probabilidad teórica de que salga sello también es ½. ¿Coinciden estos valores con los obtenidos en la probabilidad empírica? Explique.

18. Sin incluir las series, ¿cuál es la probabilidad de ganarse la lotería?

19. En una encuesta realizada a los alumnos de una institución educativa sobre si se habían vacunado contra la hepatitis A y la hepatitis B arrojó los siguientes resultados **(figura 33)**:

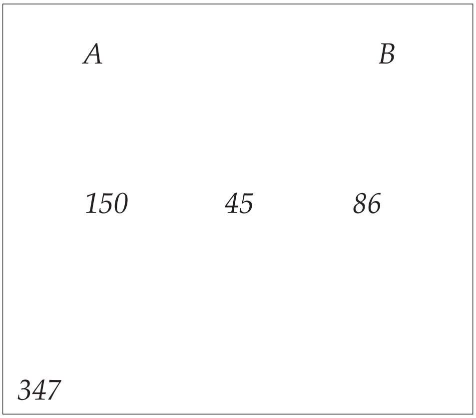


Figura 33

a. ¿Qué porcentaje de alumnos se vacunó contra la hepatitis A?
b. ¿Qué porcentaje de alumnos se vacunó contra la hepatitis B, pero no contra la A?
c. ¿Qué porcentaje de alumnos está vacunado contra la hepatitis A y B?
d. ¿Qué porcentaje de alumnos no se ha vacunado contra la hepatitis A ni contra la hepatitis B?

20. La empresa de servicio de telefonía territorial tiene un plan ilimitado local por un valor de \$48 000 mensuales. En el plan básico, el minuto tiene un valor de \$48 en el estrato 3 y el cargo fijo respectivo, un valor de \$15 990. Si usted consumió en un mes 522 minutos, ¿cuál plan le conviene más? Tenga en cuenta que el IVA para cualquier plan es del 16%.

21. En una encuesta realizada sobre quién ganará el próximo partido entre Junior y Millonarios los resultados fueron: gana Junior: 48%. Empate: 25%. Pierde Millonarios: 37%. En esos resultados hay tres errores. ¿Cuáles son?

22. Un litro de leche pesa 1000 gramos. Si la leche contiene el 14% de su peso en crema y que la crema da un 36% de su peso en mantequilla, ¿Cuántos gramos de mantequilla se obtienen de 300 litros de leche?

23. La base de un rectángulo mide 10 cm y su altura $(x + 4)$ cm. Si el área del rectángulo es 135 cm^2, determine el valor de la altura aplicando las propiedades pertinentes.

24. El área total de un prisma cuadrangular se calcula con la fórmula $A_T = P(h+a_p)$, donde P es el perímetro de la base del prisma, h la altura y a_p la apotema de la base. Si el área total es de 240 cm^2, la arista de la base mide 6 cm y la altura $(x + 3)$ cm, calcule el valor de la altura del prisma aplicando las propiedades pertinentes.

25. El volumen de una pirámide hexagonal se calcula con la fórmula $V = {}^1/_3$ (*área de la base*) h, donde h es la altura de la pirámide. Si la altura de la pirámide mide 8 cm y el volumen es de 110 cm^3, calcule el área de la base de la pirámide aplicando las propiedades de los racionales.

26. Una pluma gotea y llena un recipiente de 375 cm^3 de agua en 45 segundos. ¿Cuántos metros cúbicos de agua se desperdician en un mes?

27. Un corazón sano pulsa de 70 a 90 veces por minuto. Calcule el número de pulsaciones durante la vida de un individuo que llega a los 80 años de edad.

28. Un analgésico pediátrico establece en su administración y dosis que a los niños menores de tres meses se deben suministrar dosis entre 5 miligramos y 10 miligramos por kg de peso. Si 30 gotas hacen 1 mililitro, ¿cuántas gotas se le deben dar a un bebé de dos meses que pesa 5 kilos?

29. Una empresa de servicio eléctrico de una ciudad le realiza la lectura del contador de luz a un usuario, obteniendo los siguientes datos:

Fecha	Lectura
27 de agosto	00553 Kwh
30 de agosto	00571 Kwh
4 de septiembre	00605 Kwh

El recibo de pago le llegó al usuario con una lectura de 00638 Kwh, realizada el 9 de septiembre, pero la empresa no dejó constancia de la lectura, hecho que motivó el reclamo del usuario, quién alegó que le estaban cobrando de más. ¿Tiene la razón el usuario? Explique su respuesta.

30. Un tarro de leche en polvo tiene las siguientes indicaciones para preparar un vaso de leche de 225 ml: “Vierta en un vaso 190 ml de agua y agregue 3 medidas (incluida en la lata) o 45,4 g de producto”. Si usted dispone de un vaso medidor graduado en onzas, ¿cuántas onzas de agua deberán emplearse para una medida de leche en polvo?

Ejercicios 2.3

1. ¿El conjunto de los números racionales con las operaciones suma y multiplicación forman un sistema numérico? Justifique.

2. ¿Cuál de las siguientes proposiciones son ciertas?

a. $\frac{13}{42} < \frac{1}{3}$ **b.** $\frac{2}{7} < \frac{13}{43}$ **c.** $-\frac{7}{8} > -\frac{15}{17}$ **d.** $-\frac{2}{3} < -\frac{41}{61}$

Represéntelos en la recta real.

3. Ordene los números $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{28}$ en orden creciente. Represéntelos en la recta real.

4. Determine cuatro números racionales entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$. Ordénelos en orden creciente y represéntelos en la recta real.

5. Determine cuatro números racionales entre $\frac{1}{20}$ y $\frac{1}{25}$. Ordénelos en orden creciente y represéntelos en la recta real.

6. Determine cuatro números racionales entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. Ordénelos en orden creciente y represéntelos en la recta real.

7. Determine cuatro números racionales entre $-\frac{1}{16}$ y $-\frac{1}{2}$. Ordénelos en orden creciente y represéntelos en la recta real.

8. Obtenga en cada caso el valor de la variable x aplicando las propiedades de los números:

a. $4x - 20 = 15$
b. $2x - (6 + 3x) = -10$
c. $6x - (-20 + 10x) = 18$
d. $10x - \frac{2}{5}(13x + 30) = 27$
e. $-20x - \frac{3}{8}(40 - 25x) = -100$

9. Llene los lugares vacíos en el siguiente cuadro mágico para que las sumas de los números de cada fila sean iguales. Luego halle la suma de los números en cada columna y en cada diagonal.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$

10. Complete los siguientes crucinúmeros colocando en cada cuadro la fracción que corresponda:

	$+$		$=$	$\frac{1}{4}$
$-$		$\div$		
	$\times$		$=$	$\frac{1}{11}$
$=$		$=$		
$\frac{1}{4}$		$\frac{10}{9}$		

	$+$		$=$	$\frac{1}{4}$
$-$		$\div$		
	$\times$		$=$	$\frac{10}{9}$
$=$		$=$		
$\frac{1}{4}$		1		

2.4 LOS NÚMEROS REALES

? Problema

Uno de los problemas famosos de las matemáticas a nivel elemental es el que propuso Leonardo de Pisa (Fibonacci) en su libro *Liber Abaci* (1202). El enunciado es el siguiente:

Se coloca un par de conejos en una jaula. Durante el primer mes, los conejos no se reproducen; pero a partir de entonces, cada mes procrean un nuevo par de conejos. Si cada nueva pareja se reproduce de la misma manera, ¿cuántos pares de conejos habrán al final de un año?

Responda las siguientes preguntas:

1. Complete la siguiente tabla, que corresponde a los pares de conejos en el *n*-ésimo mes:

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_n	1	1	2	3								

2. ¿Qué patrón o regla usó para completar la tabla?
R/____________________________.

3. Complete la siguiente tabla:

$\frac{a_2}{a_1}$	$\frac{a_3}{a_2}$	$\frac{a_4}{a_3}$	$\frac{a_5}{a_4}$									
1	2											

4. ¿Qué sucede con la razón $\frac{a_n}{a_{n-1}}$?
R/___________________________________.

5. Tome su documento de identidad y calcule la razón de la medida del ancho (altura) y el largo (base). Escríbala.
R/____.

6. Seleccione una tarjeta de minutos para telefonía celular prepago y calcule la razón de la medida del ancho y el largo. Escríbala.
R/_____________________________.

7. ¿Los números calculados en las preguntas 5 y 6 que particularidad tienen? ¿Guarda relación con algún número de la segunda tabla?
R/____
____.

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

En la sección anterior se vio que los números racionales son los números de la forma:

$Q = \{x / x = \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$. A cada número racional le corresponde un punto en la recta real, pero quedan "vacíos" o puntos de la recta a los que no les corresponde un número. Esos "vacíos" van a ser ocupados por un conjunto de números denominados **números irracionales.**

Números irracionales

El conjunto de los **números irracionales** es el conjunto de números que no se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$. Por ejemplo:

$\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, e, \pi, ...\}$

El conjunto de los números irracionales se denotará como Q'.

Lo anterior indica que el conjunto de los números reales es la unión de los números racionales con los irracionales, es decir: $R = Q \cup Q'$.

Para construir un número irracional, por ejemplo $\sqrt{2}$, siga las siguientes instrucciones:

1. Divida la siguiente recta en una escala de centímetros y coloque los números -2, -1, 0, 1, 2, 3.

2. Sobre el punto de coordenada 1 (denomínelo A), construya un segmento perpendicular $\overline{AB}$ de longitud 1 cm.

3. Una el punto B con el 0 para formar un triángulo rectángulo.

4. Con un compás, haga centro en 0 y radio $0B$, trace un arco que corte a la recta en el punto C. La longitud de 0 a C es $\sqrt{2}$. ¿Por qué?

5. Explique cómo haría para construir $\sqrt{3}$.

El conjunto de los números reales, junto con las operaciones suma y multiplicación, forman un **campo** que cumple las siguientes propiedades:

1. **Propiedad clausurativa o cerradura**
   1.1 La suma de dos números reales es un número real. En símbolos:
   $\forall\, a, b \in R,\ a + b \in R$

1.2 El producto de dos números reales es un número real. En símbolos:
$\forall\ a, b \in R, a \cdot b \in R$

2. Propiedad conmutativa

2.1 El orden de los sumandos no altera el total. En símbolos:
$\forall\ a, b \in R, a + b = b + a$

2.2 El orden de los factores no altera el producto. En símbolos:
$\forall\ a, b \in R, a \cdot b = b \cdot a$

3. Propiedad asociativa

3.1 El total de una suma no varía por la manera como se agrupen los sumandos. En símbolos:
$\forall\ a, b, c \in R, a + (b + c) = (a + b) + c$

3.2 El producto de una multiplicación no varía por la manera como se agrupen los factores. En símbolos:
$\forall\ a, b, c \in R, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

4. Propiedad modulativa

4.1 Al sumar un número real con el cero, se obtiene el mismo número real. En símbolos:
$\forall\ a \in R, \exists 0 \in R/a + 0 - 0 + a = a$

4.2 Al multiplicar un número real por el uno, se obtiene el mismo número real. En símbolos:
$\forall\ a \in R, \exists 1 \in R/a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

5. Propiedad del inverso

5.1 Al sumar un número real con su opuesto aditivo, el total es cero (0). En símbolos:
$\forall\ a \in R, \exists(-a) \in R/a + (-a) = (-a) + a = 0$

5.2 El producto de todo número real con su inverso multiplicativo es uno. En símbolos:

$$\forall a \in R, \exists \frac{1}{a} \in R / a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

6. Propiedad distributiva

Para multiplicar una suma indicada por un número, se multiplica cada uno de los sumandos por el número y se suman los

productos parciales. Es decir, la multiplicación se distribuye sobre la suma. En símbolos:
$\forall\ a, b, c \in R, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Un resumen de los **teoremas** de los números reales es la siguiente lista:
1. **Propiedad anulativa:** $a \cdot 0 = 0$
2. **Propiedad uniforme aditiva:** *Si* $a = b$ *entonces* $a + c = b + c$
3. **Propiedad uniforme multiplicativa:** *Si* $a = b$ *entonces* $a \cdot c = b \cdot c$
4. **Propiedad cancelativa aditiva:** *Si* $a + c = b + c$ *entonces* $a = b$
5. **Propiedad cancelativa multiplicativa:** *Si* $a \cdot c = b \cdot c$ *entonces* $a = b$
6. **Teorema de los signos:**
   6.1 $a\,(-b) = -ab$
   6.2 $(-a)\,b = -ab$
   6.3 $(-a)\,(-b) = ab$
   Si en 6.1 se reemplaza b por 1, se obtiene el teorema 7:
7. $a \cdot (-1) = -a$
8. $-(-a) = a$
9. $(a^{-1})^{-1} = a$

Ejemplos de aplicación de los teoremas anteriores son los siguientes:

Ejemplo 2.4.1

- Si $x + 2 = y + 2$, entonces $x = y$ por la **propiedad cancelativa.**
- Si $6 \cdot \frac{1}{a} = 6 \cdot \frac{1}{b}$, entonces $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ por la **propiedad cancelativa.**
- $(-5)\,4 = -20 = (-4)\,5$ por el **teorema de los signos.**

La sucesión de números dada al inicio de esta sección se denomina la **sucesión de Fibonnaci** y está relacionada con el **número de oro** o la **razón áurea.**

La secuencia de Fibonacci se encuentra en la naturaleza (espirales de una margarita, patrón de reproducción de abejas obreras machos, piñas de pino, etc.).

El número de oro, simbolizado, por Φ, es el número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989...$ cuya aproximación se obtiene de la razón $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ de los términos de la sucesión de Fibonacci. Este número también se encuentra en la naturaleza (contorno espiral de las conchas , botánica) y en el cuerpo humano (razón entre la estatura y la altura cabeza-ombligo). Fue tomado como referencia por la arquitectura de Stonehenge de los siglos XX y XVI a. C. El número de oro también fue tomado como referencia por los arquitectos griegos del siglo V a. C., tanto es así que el Partenón, en Atenas **(figura 34)**, es un ejemplo del sistema griego de proporciones.

Figura 34

Otro número irracional famoso es el número *pi*, π, cuyo valor aproximado es 3,141592654…, y que se obtiene teóricamente de la razón de la longitud o perímetro de una circunferencia y el diámetro. Su historia se remonta desde el Papiro de Rhind (1700 a. C.), pero en sus inicios el número *pi* no tenía nombre y su valor inicial no era el actual. Por ejemplo, en la Biblia en el libro 1 de los Reyes, capítulo 7, versículo 23 aparece el siguiente texto:

"Hiram hizo después una enorme pila de bronce para el agua. Era redonda, y medía cuatro metros y medio de un borde al otro. Su altura era de dos metros y veinticinco centímetros, y su circunferencia de trece metros y medio", de donde se deduce que *"pi"* tenía un valor de 3.

Arquímedes (215 a. C.) aproxima su valor por exceso y por defecto, al inscribir y circunscribir polígonos regulares en una circunferencia, y obtiene que su valor está entre 223/71 = 3,14084 y 22/7 = 3,14285.

Sólo desde el siglo XVII la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia se convirtió en un número y fue identificado con el nombre *"pi"* (de *periphereia*, Περιμετρον nombre que los griegos daban al perímetro de un círculo). Llevó largo tiempo demostrar que pi era un irracional, como infinita es la posibilidad de encontrarle un nuevo decimal.

Ejemplo 2.4.2

Calcule el volumen de un cono que tiene de altura 8 cm y de radio 2 cm. Escriba la solución con números irracionales.

Solución:

El volumen de un cono **(figura 35)** se calcula con la fórmula $V = {}^{1}/_{3}\ \pi\ r^2\ h$, donde r es el radio de la base y h la altura.

Reemplazando valores: $V = {}^{1}/_{3}\ \pi\ (2\text{cm})^2\ (8\ \text{cm})$, $V = {}^{1}/_{3}\ \pi\ (4\text{cm}^2)\ (8\text{cm}) = {}^{32}/_{3}\ \pi\ \text{cm}^3$.

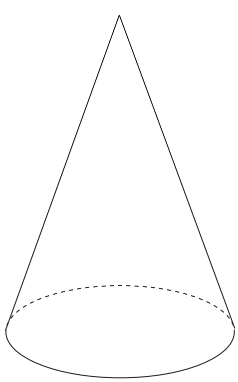


Figura 35

Ejemplo 2.4.3

Un envase cilíndrico tiene un área lateral de 90π cm^2, un radio de 3 cm y una altura de (x+5) cm. Calcule el valor de la altura aplicando las propiedades de los números reales.

Solución:

La fórmula para calcular el área lateral de un cilindro **(figura 36)** es: $A_L = 2\pi\, r\, h$, donde r es el radio de la base y h la altura.

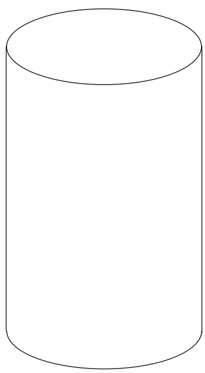


Figura 36

1. $2\pi\,(3)(x + 5) = 90\pi$ **Fórmula área lateral de un cilindro.**
2. $6\pi\,(x + 5) = 90\pi$ **Propiedad clausurativa.**
3. $6\,(x + 5) = 90$ **Propiedad cancelativa de la multiplicación.**
4. $6 \cdot \frac{1}{6}(x+5) = 90 \cdot \frac{1}{6}$ **Propiedad uniforme de la multiplicación.**
5. $(6 \cdot \frac{1}{6})(x+5) = 90 \cdot \frac{1}{6}$ **Propiedad asociativa.**
6. $1\,(x+5) = 90 \cdot \frac{1}{6}$ **Propiedad del inverso multiplicativo.**
6. $x+5 = 90 \cdot \frac{1}{6}$ **Propiedad modulativa de la multiplicación.**
7. $x + 5 - 15$ **Propiedad clausurativa.**
8. $x + 5 + (-5) = 15 + (-5)$ **Propiedad uniforme aditiva.**

9. $x + [5 + (-5)] = 15 + (-5)$ **Propiedad asociativa.**
10. $x + 0 = 15 + (-5)$ **Propiedad del inverso aditivo.**
11. $x = 15 + (-5)$ **Propiedad modulativa de la suma.**
12. $x = 10$ **Propiedad clausurativa.**

Como la altura mide x +5, al reemplazar x = 10 se obtiene que h=10+5=15 cm. La altura del cilindro mide 15 cm.

Ejemplo 2.2.4

Calcule la longitud de la diagonal del cuadrado de la **figura 37**, escribiendo la solución con números irracionales.

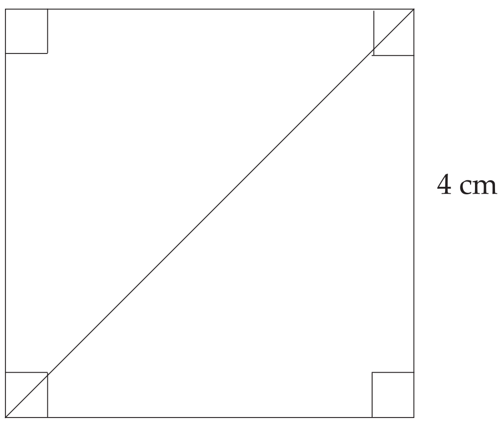


Figura 37

Solución:

La longitud de la diagonal d del cuadrado se calcula con el teorema de Pitágoras:
$d^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 \Rightarrow d^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{32} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2}.$
La longitud de la diagonal del cuadrado es $4\sqrt{2}$ cm.

Aplicaciones

1. Siga las siguientes instrucciones:
   1) Construya un triángulo rectángulo *ABC* de catetos *AB=BC=1 cm.*
   2) Calcule la longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$.
   3) Sobre $\overline{AC}$ construya el triángulo rectángulo *ACD* con catetos $\overline{AC}$ y *CD=1 cm.*
   4) Calcule la longitud de la hipotenusa $\overline{AD}$.
   5) Sobre $\overline{AD}$ construya el triángulo rectángulo *ADE* con catetos $\overline{AD}$ y *DE=1 cm.*
   6) Calcule la longitud de la hipotenusa $\overline{AE}$.
   7) Siga con la secuencia hasta obtener una hipotenusa con longitud $\sqrt{7}$.

2. En el interior de un cuadrado, de 4 cm de lado, hay cuatro circunferencias tangentes entre sí y tangentes a los lados del cuadrado. Si se quiere construir una quinta circunferencia en el centro del cuadrado que sea tangente a las cuatro primeras, ¿cuál debe ser su radio? Escriba la solución con números irracionales.

3. A un cubo de 8 cm de arista se le han trazado las diagonales de tres caras adyacentes de tal manera que la unión de las tres diagonales forman el ΔABC. Complete la **figura 38** para formar el ΔABC. ¿Qué tipo de triángulo es el ΔABC? Justifique su respuesta.

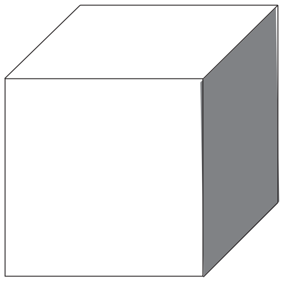


Figura 38

4. Puede haber leído los enunciados "utilice 22/7 para π" y "utilice 3,14 para π". Como 22/7 es el cociente de dos enteros y 3,14 es un decimal finito, ¿sugieren estos enunciados que π es racional?

5. El perímetro de la base de una lata cilíndrica es de 28 cm. ¿Cuánto mide el diámetro de la base de la lata? ¿Cuántas veces contiene el perímetro al diámetro? ¿Cómo se interpreta π en este problema?

6. Un joyero va a construir unos aretes con la forma de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 2cm de radio. Si el lado del triángulo debe medir $2\sqrt{3}\,cm$, y el joyero desea una precisión de 0,1mm, ¿cuál debe ser la medida del lado?

7. Según la estética, el índice de busto armónico (IBA) es de 0,7. La fórmula para calcularlo es $IBA = \frac{per'metro\ cintura}{per'metro\ busto}$. ¿Es el IBA un número irracional? Explique su respuesta.

8. El índice de masa corporal (IMC) es la medida que aplica la medicina para saber si una persona tiene sobrepeso. La fórmula para calcularlo es $\mathrm{IMC} = \frac{\text{peso}}{(\text{estatura})^2}$ ¿Cuáles son las unidades del IMC? ¿Es el IMC un número irracional? Justifique su respuesta.

9. La sucesión de Fibonacci puede definirse con la fórmula

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Halle los primeros ocho términos y verifique que concuerdan con los obtenidos en el problema planteado al inicio de esta sección.

10. Determine los cuatro signos distintos efectuando las operaciones sucesivamente, sin tener en cuenta las reglas de una ecuación:

6		**3**		**4**		**7**		**7**	**=**	**3**

Ejercicios 2.4

1. ¿El conjunto de los números reales con las operaciones suma y multiplicación forman un sistema numérico? Justifique.

2. ¿Es válido afirmar que la adición es distributiva con respecto a la multiplicación? O sea, ¿$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$?

3. ¿Es distributiva la multiplicación con respecto a la sustracción? Esto es, ¿$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$?

4. ¿Es la sustracción distributiva con respecto a la multiplicación? O sea, ¿$a - (b \times c) = (a - b) \times (a - c)$?

5. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera y cuál es falsa? Justifique.

a. $a \div (b + c) = (a \div b) + (a \div c)$

b. $(a + b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$

6. Determine dos números racionales que estén entre $\frac{1}{11}$ y $\frac{1}{4}$.

7. Determine tres números racionales entre $\frac{1}{11}$ y $\frac{1}{11}$.

8. Encuentre las coordenadas de dos puntos que estén a dos unidades de $\sqrt{3}$.

9. Escriba las propiedades o definiciones correspondientes en la siguiente demostración de $(4a + 3) + 28\,a + 2 = 6a + 7$.

1. $(4a + 3) + 2\,(a + 2) = \quad (4a + 3) + (2a + 2) \cdot 2$ ________________
2. $\qquad = (4a + 3) + (2a + 4)$ ________________
3. $\qquad = (4a + 2a) + (3 + 4)$ ________________
4. $\qquad = (4 + 2)\,a + (3 + 4)$ ________________
5. $\qquad = 6a \qquad + \qquad 7$
____

10. Simplifique aplicando las propiedades de los números reales:
a. $(a + b) + (a - b)$
b. $(a + b) - (a - b)$

11. Escriba las propiedades o definiciones correspondientes en la siguiente demostración de $a \cdot 0 = 0$
1. $0 + 0 = 0$
2. $a\,(0 + 0) = a \cdot 0$
3. $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$
4. $a \cdot 0 + a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)] = a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)]$
5. $a \cdot 0 + \{a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)]\} = \{a \cdot 0 + [-(a \cdot 0)]\}$
6. $a \cdot 0 + 0 = 0$
7. $a \cdot 0 = 0$

Acertijos

1. Escriba los números naturales del 1 al 15 en la tabla adjunta de tal forma que la suma de los números de casillas vecinas siempre resulte un cuadrado perfecto.

2. Con cuatro 4 obtenga los números del 0 al 9.

3. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con la palabra AMOR? ¿Cuál es la vigésimoprimera palabra si la lista se ha formado en orden alfabético?

4. Ana escribió nueve números, todos eran 1, 2 ó 3. Beto escribió debajo de cada número, el número de veces que aparecía y después borró la lista de Ana. Luego llegó Carmen e hizo lo mismo que Beto. Si la lista de Carmen es 8 8 8 1 8 8 8 8 8 y en la lista de Ana los cinco primeros números suman 9 y todos suman 21, ¿cuál es la lista de Ana?

5. La siguiente multiplicación está incompleta. ¿Es posible completarla?

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & * & 1 & * \\
 & & \times & 3 & * & 2 \\
\hline
 & & & * & 3 & * \\
 & 1 & * & 6 & * & \\
* & 2 & * & 5 & & \\
\hline
1 & * & 1 & * & 3 & *
\end{array}
$$

BIBLIOGRAFÍA

ALLENDOERFER, Carl & OAKLEY, Cletus (1988). *Fundamentos de matemáticas universitarias* (3.ª Ed.). México: McGraw-Hill.

BOSCH GIRAL, Carlos (2003). *Matemáticas Básicas*. México: Limusa.

RITTON, Jack R. & BELLO, Ignacio (1982). *Matemáticas contemporáneas* (2.ª Ed.). México: Harla.

CARO, Víctor, OBONAGA, Édgar & PÉREZ, Jorge (1982). *Matemática 1 y 2: Aritmética y Geometría*. Cali: Pime.

LOVAGLIA, Florence, ELMORE, Merritt & CONWAY, Donald (1969). *Álgebra*. México: Harla.

MILLER D., Charles, HEEREN, Vern & HORNSBY JR, E. John (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones* (8.ª Ed.). México: Pearson.

SWOKOWSI, Earl & COLE, Jeffery (2001). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (10.ª Ed.). México: Thomson.

TAYLOR, Howard & WADE, Thomas (1989). *Matemáticas Básicas con vectores y matrices*. México: Limusa.

Unidad 3

FUNCIONES

Contenido

3.1 LA FUNCIÓN LINEAL

Problema

En algunas tiendas el propietario tiene una balanza electrónica que le permite introducir el precio por kilo de un artículo y el equipo automáticamente proporciona el valor en pesos de la cantidad del producto medido.

Por ejemplo, si el kilo de tomate está a $900, llene la siguiente tabla para saber cuánto vale la cantidad que se especifica:

Cantidad (en kilos)	2	2,8	3,6	4,2	5	6	7
Precio (en pesos)							

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué operaciones matemáticas tuvo que realizar para llenar la tabla?
R/____.

2. ¿Cuál sería la expresión matemática que permite obtener el precio de x cantidad de tomate?
R/____.

3. ¿Qué valores podría tomar x ? ¿Por qué?
R/_____________________________________.

4. Qué sucede si se restan valores consecutivos del precio en valores igualmente espaciados de x ?
R/____.

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Definición:

Una **función** es una relación entre los elementos de dos conjuntos no vacíos A y B, de tal forma que a todo elemento del conjunto A se le asigna uno y sólo un elemento del conjunto B.

La anterior definición establece que una función está compuesta por un conjunto de parejas ordenadas (x, y) en las cuales dos parejas distintas no tienen el mismo primer elemento. La primera componente, x **(variable independiente)**, pertenece al conjunto A, mientras que la segunda componente, y, **(variable dependiente)** pertenece al conjunto B. Cada conjunto tiene un nombre que se especifica a continuación:

Definición:

Sea f una función de A en B, denotada por $f: A \to B$.
El **dominio** de f es el conjunto de elementos de A. En otras palabras, es el conjunto de valores que puede tomar la **variable independiente.**
A un elemento del dominio se le llama **pre-imagen.**
El **rango** de f es el conjunto de elementos de B. Es decir, es el conjunto de valores que puede tomar la **variable dependiente.**
A un elemento del rango se le denomina **imagen.**

El papel de las funciones en las Ciencias es el de modelar situaciones del entorno para predecir lo que va a suceder en dicha situación. De manera general, un *modelo matemático* es una representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas. Es por ello que debemos tener cuidado en el momento de seleccionar el dominio de la función, y por supuesto, el rango, ya que no es lo mismo hablar de **dominio matemático** que del **dominio contextual**, aunque están relacionados: el dominio contextual siempre es un subconjunto del dominio matemático.

Definición: 1

El **dominio matemático** es el conjunto de números que producen un número real cuando se sustituyen por la variable independiente. El **dominio contextual** es el conjunto de números que, además de producir un número real cuando se sustituyen por la variable independiente, tienen sentido para la función que modela la situación.

El siguiente ejemplo ilustra la diferencia:

Ejemplo 3.1.1

Un vendedor compró una docena de lápices negros por \$4800 y desea vender cada unidad a \$600.

a. Si x denota la cantidad de lápices vendidos, obtenga una función I para el ingreso en términos de x.
b. Obtenga el dominio contextual de la función $I\,(x)$. Clasifíquelo en discreto o continuo.
c. ¿Cuál es la variable independiente y la variable dependiente?
d. Calcule $I(4)$ e interprete el resultado.
e. Grafique la función de ingreso $I(x)$

Solución:

a. Si x denota la cantidad de lápices vendidos, entonces una tabla de valores que muestre el ingreso de vender 1, 2, 3…, 12 lápices es:

x	0	1	2	3	4	5	6
I	0	\$600	\$1200	\$1800	\$2400	\$3000	\$3600

Por lo tanto, el ingreso de vender x lápices es $I(x) = 600\,x$ *pesos*.

b. El dominio contextual de la función es $Dom\ I(x) = \{x/0\ x \leq 12, x \in Z\}$, porque el vendedor sólo compró una docena de lápices, y no puede vender 20 lápices, por ejemplo. El dominio matemático de la función de ingreso es $Dom\ I(x) = R$, o sea, todos los números reales. Pero nadie puede vender -10 lápices o ½ lápiz; estos valores no tienen sentido para la función de ingreso del vendedor.

c. La variable independiente es *x,* la cantidad de lápices y la variable dependiente es el ingreso *I.*

d. $I(4) = 600(4) = 2400\ pesos$**.** Esto significa que cuando el vendedor vende cuatro lápices negros, recibe un ingreso de $2400.

e. Para dibujar la gráfica **(figura 39)** hacemos uso de la tabla del ítem **a:**

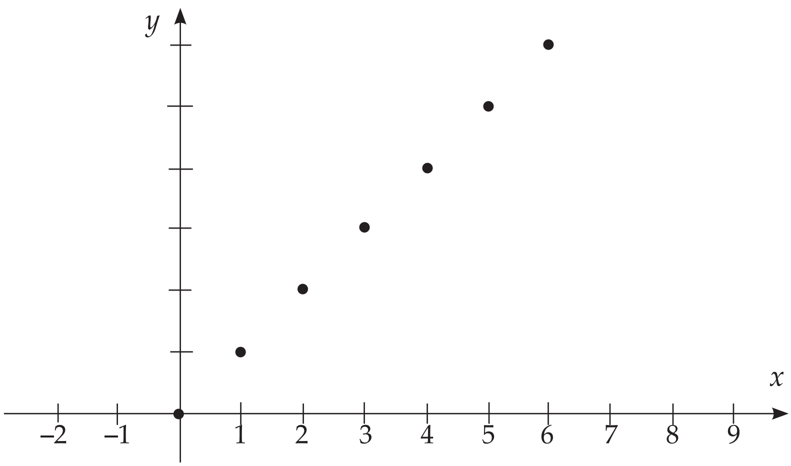


Figura 39

En dicha gráfica, la escala sobre el eje *Y* es: una división = 600 pesos.

Las funciones se representan de cuatro maneras:

- 1**Simbólica** o **algebraica:** por medio de una fórmula.
- 1**Gráfica:** por medio de una gráfica.
- 1**Tabular** o **numérica:** por medio de una tabla.
- 1**Verbal:** mediante una descripción con palabras.

Ejemplo 3.1.2

Sea la función $f(x) = 4x - 3$. Describa la función de las cuatro maneras

Solución:

De manera simbólica es la expresión dada: $f(x) = 4x - 3$. La representación tabular es la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-15	-11	-7	-3	1	5	9

La representación gráfica es la **figura 40**:

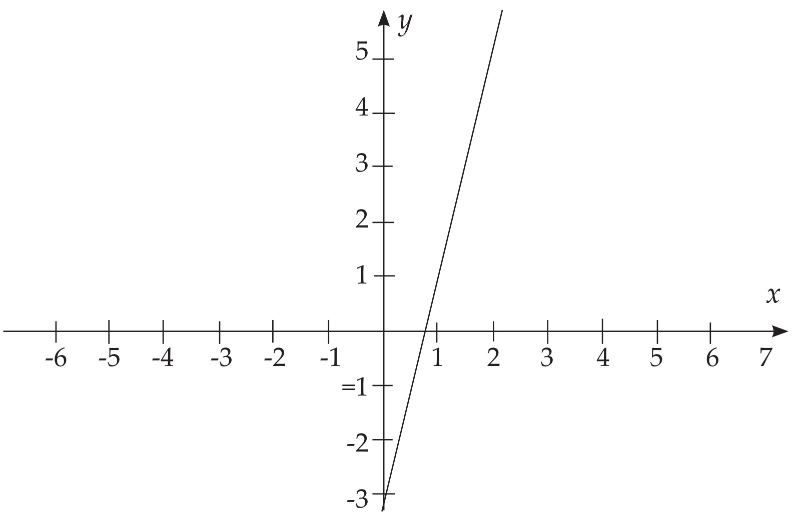


Figura 40

Observe que la gráfica es una línea recta, o sea, es una función lineal, que se definirá más adelante en esta sección.

Y por último, la representación verbal es: *cuadruplica el número dado y luego resta tres*.

No todas las situaciones al modelarlas originan funciones de un solo tipo. Las funciones pueden ser lineales, cuadráticas, cúbicas, racionales, etc. En esta sección se estudian las funciones lineales y en la próxima sección, las cuadráticas y las cúbicas.

Definición:

La **función lineal** es una función que tiene la forma algebraica $f(x) = mx + b$, $a \in R$, $b \in R$, $b \neq 0$ m es la pendiente de la recta y b es el y-intersecto o punto de corte con el eje y.

Ejemplo 3.1.3

Identifique las funciones lineales en el siguiente grupo de funciones y luego identifique la pendiente de la recta. Grafique las funciones lineales.

a. $f(x) = 2x - 3$
b. $f(x) = 4x^2 + 1$
c. $f(x) = -3x + 4$

Solución:

a. La función $f(x) = 2x - 3$ tiene pendiente 2 y el y-intersecto es -3, es decir, la recta corta al eje y en el punto (0, -3).

Para graficar una recta basta con obtener dos puntos de ella en virtud del postulado de la recta, que afirma: *"Dados dos puntos, existe exactamente una recta que los contiene."*

x	0	2
y	-3	1

La gráfica de la función **(figura 41)** se obtiene localizando los dos puntos en el plano y uniéndolos con una regla:

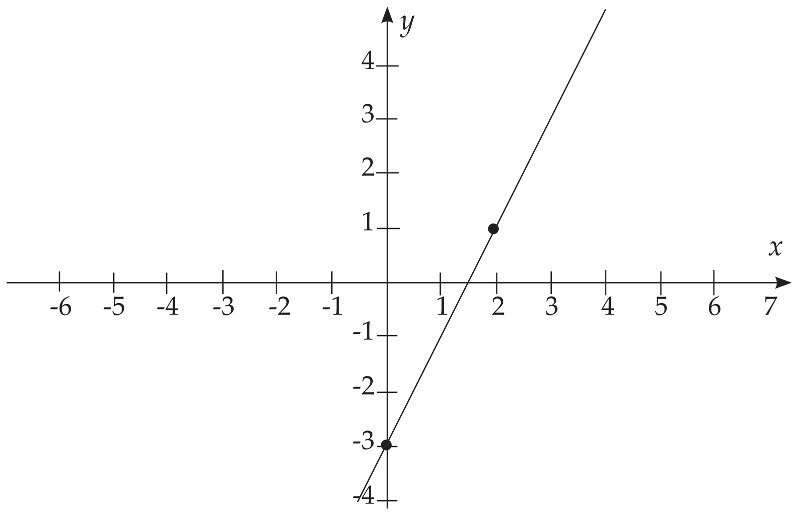


Figura 41

b. La función $f(x) = 4x^2 + 1$ no es una función lineal porque la variable independiente x está elevada al cuadrado, por lo tanto no tiene la forma $f(x) = mx + b$. Es una función cuadrática.

c. La función $f(x) = -3x + 4$ tiene pendiente -3 y el y-intersecto es 4, es decir, la recta corta al eje y en el punto (0, 4).

Para graficar una recta basta con obtener dos puntos de ella en virtud del postulado de la recta que afirma: *"Dados dos puntos, existe exactamente una recta que los contiene."*

x	0	1
y	4	1

Se procede igual que en la función del inciso **a.** para obtener la gráfica **(figura 42)**:

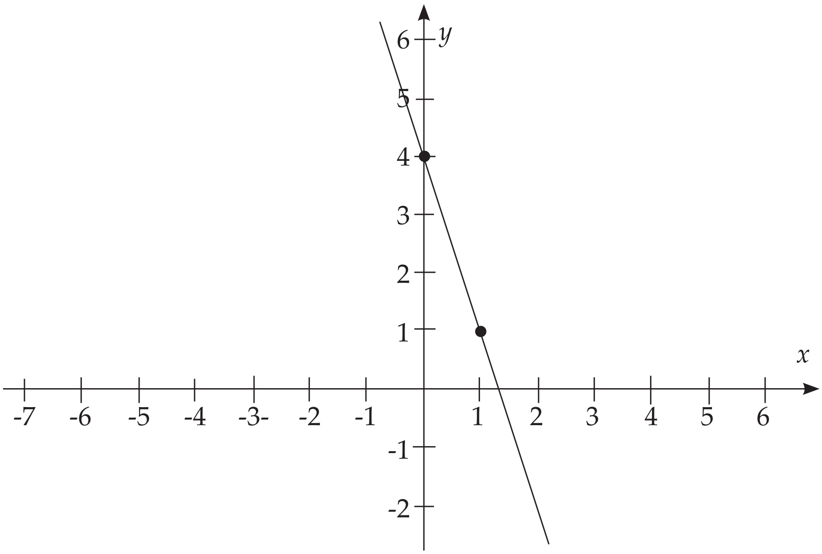


Figura 42

A fin de modelar una situación por medio de una función lineal, se deben obtener dos puntos para conocer el valor de la pendiente y luego la fórmula de la ecuación punto-pendiente.

Definición:

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos diferentes. La **pendiente** $\boldsymbol{m}$ de la recta l se define por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, donde $x_2 \neq x_1$

Fórmula de la ecuación punto-pendiente 1

La ecuación de una recta l con **pendiente** $\boldsymbol{m}$ que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ es $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Ejemplo 3.1.4

Un alambre dulce de 10 cm se dobla para formar un rectángulo.

a. ¿Cuáles son todas las posibilidades para la medida de la base y de la altura si sólo se consideran los números naturales? Grafíquelas.

b. ¿Se pueden describir todas las opciones si se tiene en cuenta los números reales? Explique su respuesta.

c. Obtenga la función que exprese la medida de la altura (y) en términos de la medida de la base (x) y determine su dominio.

d. Si la función es lineal, identifique la pendiente e interprétela.

e. Grafique la función e interprete gráficamente la pendiente.

f. Calcule $f(2)$ y $f(3, 5)$. Interprete los resultados.

g. Describa verbalmente la función obtenida.

Solución:

a. Si sólo se tienen en cuenta los números naturales, las posibilidades de medida para la base y la altura del rectángulo son los de la **figura 43:**

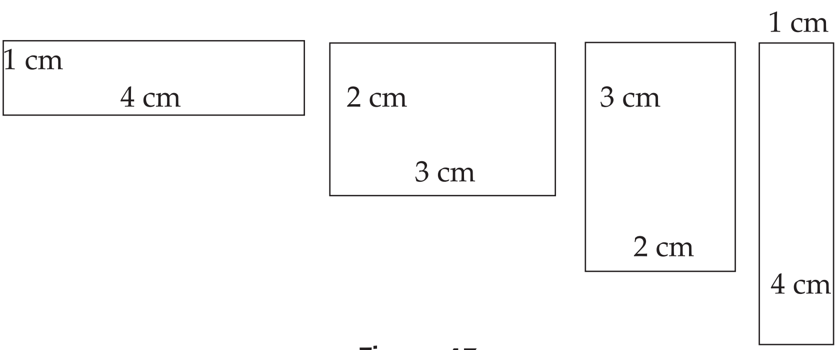


Figura 43

Organícelos en una tabla:

Base (cm)	4	3	2	1
Altura (cm)	1	2	3	4

Si x es la medida de la base y y es la medida de la altura, entonces la gráfica es **la figura 44:**

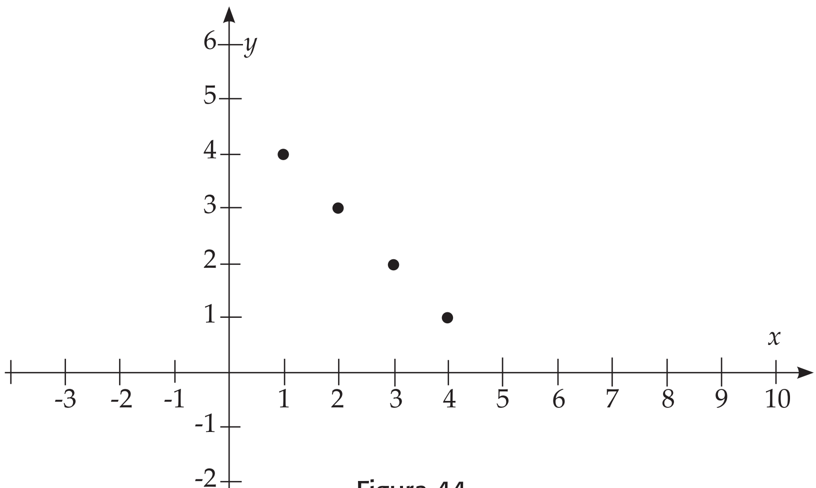


Figura 44

b. No, porque el conjunto de las opciones es infinito.

c. Por definición de perímetro:

$P(rectángulo)=2x+2y=10$,	**porque la longitud del alambre es de 10 cm**.
$2(x+y)=10$	**Propiedad distributiva.**
$\frac{1}{2}\cdot 2(x+y)=\frac{1}{2}\cdot 10$	**Propiedad uniforme de la multiplicación.**
$x+y=5$	**Propiedad del inverso multiplicativo y clausurativa.**
$-x+x+y=5-x$	**Propiedad uniforme de la suma.**
$(-x+x)+y=5-x$	**Propiedad asociativa de la suma.**
$0+y=5-x$	**Propiedad del inverso aditivo.**
$y=5-x$	**Propiedad del módulo aditivo.**

Por lo tanto, la función que expresa a la medida de la altura en términos de la medida de la base es $y = 5 - x$ o $f(x) = 5 - x$.

El dominio de la función $f(x) = -x + 5$ de acuerdo a las condiciones del problema es el conjunto de los números reales que va del cero al cinco, o sea: *dom* $f(x) = \{x/0 \leq +x \leq 5\}$. Esto porque la base y la altura no pueden tener valores negativos. Aunque la función matemáticamente tiene imagen en x=-1, no tiene sentido decir que rectángulo tiene de base -1 cm.

d. La función $f(x) = -x + 5$ tiene la forma $f(x) = mx + b$, donde la pendiente m=-1 y el y-intercepto es 5.
Como la pendiente es -1, este valor significa que un aumento de 1 cm en la base implica una reducción de 1 cm en la altura o una disminución de 1 cm en la base, conlleva un aumento de 1 cm en la altura porque para este problema:

$$\mathrm{m} = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{\text{cambio base}}{\text{cambio altura}},$$

$$\mathrm{m} = \frac{-1}{1} = \frac{\text{la base dis min uye en 1cm}}{\text{la altura aumenta en 1cm}} \text{ o también}$$

$$m = \frac{1}{-1} = \frac{\textit{la base aumenta en } 1cm}{\textit{la altura dis}\min\textit{uye en } 1\ cm}$$

donde el símbolo *delta,* Δ, indica incremento o cambio.

e. Para graficar la función $f(x) = -x + 5$, hacemos como en el ejemplo 3.1.4 inciso a: se grafican los dos puntos (1, 4) y (3, 2) y se unen con una regla **(figura 45)**:

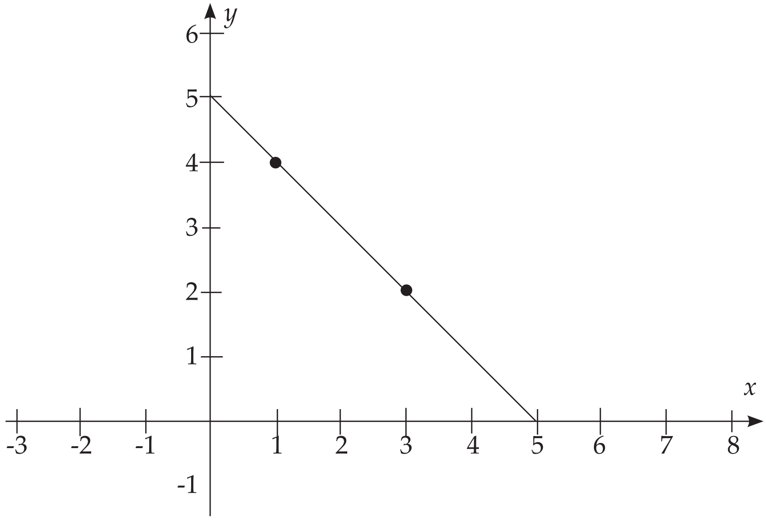


Figura 45

Para interpretar gráficamente la pendiente, hacemos uso de la **figura 46**:

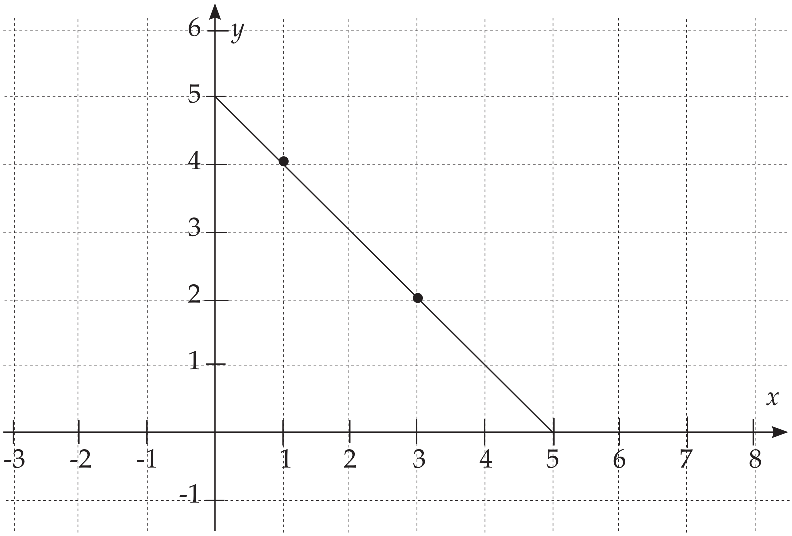


Figura 46

Como la pendiente es $m = -1$, esto equivale a $m = \frac{-1}{1} = \frac{\text{avance vertical en una unidad hacia abajo}}{\text{avance horizontal en una unidad hacia la derecha}}$; por lo tanto, si partimos del punto (3, 2) de la recta y avanzamos una unidad hacia abajo y una unidad hacia la derecha, regresamos a la recta en el punto (2, 3). Así como escogimos el punto (3, 2) para la interpretación gráfica, también se puede escoger otro punto como, por ejemplo, el (4, 1).

Similarmente:
$m = -1 = \frac{1}{-1} = \frac{\text{avance vertical en una unidad hacia arriba}}{\text{avance horizontal en una unidad hacia la izquierda}}$, por lo tanto, si partimos del punto (2, 3) de la recta y avanzamos una unidad arriba y una unidad hacia la izquierda, regresamos a la recta en el punto (3, 2).

f. $f(3{,}5) = -3{,}5 + 5 \Rightarrow f(3{,}5) = 1{,}5$. Esto significa que cuando la base del rectángulo mide 3,5 cm, la altura mide 1,5 cm **(figura 47).**

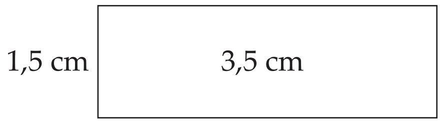


Figura 47

$f(2) = -2 + 5 \Rightarrow f(2) = 3$. Esto significa que cuando la base del rectángulo mide 2cm, la altura mide 3 cm **(figura 48).**

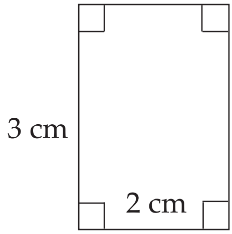


Figura 48

g. La descripción verbal de la función $f(x) = -x + 5$ es: *a cinco le resta el número dado.*

Ejemplo 3.1.5

Conforme el aire seco se eleva, se expande y enfría. La temperatura a nivel del suelo es de 20ºC y a una altitud de 1 km es de 10ºC. Existe una función lineal de la temperatura T en términos de la altitud h.

a. Calcule la pendiente e interprétela de acuerdo al problema.
b. Exprese la altura como función lineal de la temperatura. Determine su dominio.

c. Calcule $T(3)$. Interprete el resultado.
d. Grafique la función.
e. Interprete gráficamente la pendiente.
f. Describa verbalmente la función obtenida.

Solución:

a. Como la temperatura T está en función de la altura h, entonces t es la variable dependiente y h la variable independiente. Por lo tanto, se tienen los puntos (0, 20) y (1, 10). La pendiente es:

$$m = \frac{20-10}{0-1} = \frac{10}{-1} = -10 = \frac{\text{cambio de temperatura}}{\text{cambio de altura}} = \frac{\Delta T}{\Delta h}\ .$$

Como la pendiente es -10, este valor significa que un aumento de 1 km en la altura implica una reducción de 10º C en la temperatura o una disminución de 1 km en la altura, implica un aumento de 10ºC en la temperatura. Esto porque:

$$m = \frac{\Delta T}{\Delta h} = \frac{-10}{1} = \frac{\textit{dis}\min \textit{uci—nde la temperatura en } 10^{o}C}{\textit{aumento de la altura en } 1km} \qquad \text{o}$$

$$m = \frac{\Delta T}{\Delta h} = \frac{10}{-1} = \frac{\textit{aumento de la temperatura en } 10^{o}C}{\textit{dis}\min \textit{uci—nde la altura en } 1km}$$

b. Como ahora se conoce que $m = -10$, se aplica la fórmula punto pendiente con el punto (0, 20):
La fórmula punto-pendiente se configura: $T - T_1 = m(h - h_1)$.
Reemplazando: $T - 20 = -10(h - 0) \Rightarrow T = -10h + 20$ o $T(h) = -10h + 20$.
Como la variable independiente es la altura, su dominio es el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero porque la altura negativa es para debajo del nivel del mar. Por lo tanto, Dom $T(h) = \{h / h \geq 0\}$.

c. $T(3) = -10(3) + 20 \Rightarrow T(3) = -10$. Esto significa que a una altura de 3 Km, el aire seco tiene una temperatura de -10ºC.

d. Para graficar la función $T(h) = -10h + 20$ se hace como en el ejemplo 3.1.4 inciso a: se grafican los dos puntos (0, 20) y (1, 10) y se unen con una regla **(figura 49)**:

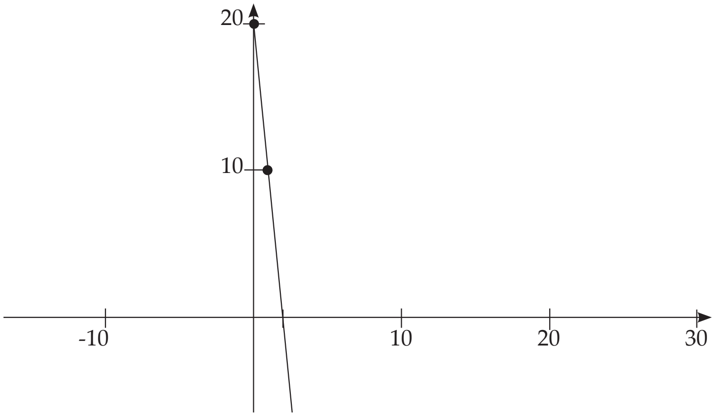


Figura 49

El eje vertical, de la variable dependiente, es la temperatura en grados centígrados y el eje horizontal, de la variable independiente, es la altura en km.

e. Para interpretar gráficamente la pendiente, hacemos uso de la siguiente gráfica **(figura 50):**

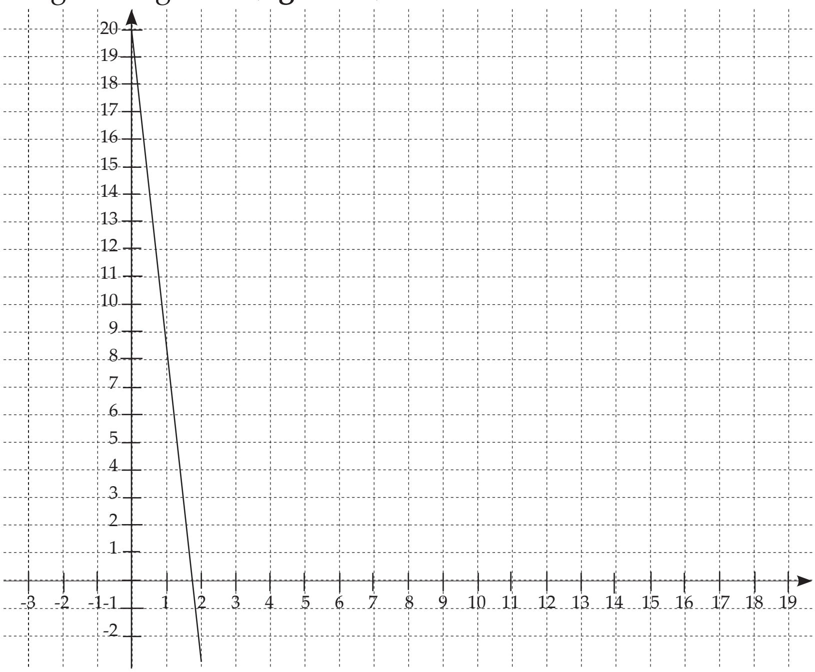


Figura 50

Como la pendiente es $m = -10$, esto equivale a

$m = \frac{-10}{1} = \frac{\text{avance vertical en diez unidades hacia abajo}}{\text{avance horizontal en una unidad hacia la derecha}}$, por lo tanto, si se parte del punto (0, 20) de la recta y se avanza diez unidades hacia abajo y una unidad hacia la derecha, se regresa a la recta en el punto (1, 10). Así como se escogió el punto (20, 0) para la interpretación gráfica, también se puede escoger otro punto, como por ejemplo, el (2, 0).

Similarmente:

$m = -10 = \frac{10}{-1} = \frac{\text{avance vertical en diez unidades hacia arriba}}{\text{avance horizontal en una unidad hacia la izquierda}}$, por lo tanto, si se parte del punto (1, 10) de la recta y se avanzan diez unidades arriba y una unidad hacia la izquierda, se regresa a la recta en el punto (0, 20).

f. La descripción verbal de la función $t(h) = -10h + 20$ es: *20 disminuido por el producto de -10* y *un número.*

Aplicaciones

1. Existe una relación lineal entre las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit. Si cuando C=0º, F=32º y cuando C=100º, F=212, entonces:

- **a.** Calcule la pendiente.
- **b.** Interprete la pendiente de acuerdo al problema.
- **c.** Obtenga la función lineal que expresa los grados Fahrenheit en términos de los grados Celsius.
- **d.** Describa verbalmente la función obtenida en el inciso anterior.
- **e.** Grafique la función lineal obtenida.
- **f.** Interprete gráficamente la pendiente.
- **g.** ¿A qué temperatura Fahrenheit corresponden 20ºC?

2. Existe una relación lineal entre las temperaturas en grados Celsius y Kelvin. Si cuando C=0º, K=273º y cuando C=100º, K=373, entonces:
   a. Calcule la pendiente.
   b. Interprete la pendiente de acuerdo al problema.
   c. Obtenga la función lineal que expresa los grados Kelvin en términos de los grados Celsius.
   d. Describa verbalmente la función obtenida en el inciso anterior.
   e. Grafique la función lineal obtenida.
   f. Interprete gráficamente la pendiente.
   g. ¿A qué temperatura Kelvin corresponden 150ºC?

3. Una cinta métrica está graduada en centímetros y pulgadas. Si cuando la escala en centímetros marca 635, la escala en pulgadas marca 250:
   a. Deduzca la función lineal que expresa los centímetros en términos de pulgadas.
   b. Interprete la pendiente de acuerdo al problema.
   c. ¿Cuántos centímetros tiene una pulgada?

4. Siga las siguientes instrucciones:
   a. Construya un cuadrado que mida 1 pulgada de lado en la siguiente cuadrícula **(figura 51)**:

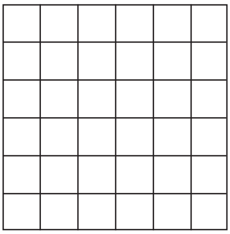


Figura 51

   b. ¿Cuántos cuadrados de 1 cm^2 caben en el cuadrado que tiene de lado 1 pulgada?
   c. Obtenga una función lineal que exprese los cm^2 cuadrados en términos de pulgadas cuadradas.

d. Interprete la pendiente de acuerdo al problema.
e. ¿Cuántos centímetros cuadrados tiene 5,6 pulgadas cuadradas?

5. 1Un rectángulo de base x cm y altura y cm tiene un perímetro de 16 cm. La gráfica de la función que relaciona la base con la altura es la **figura 52**:

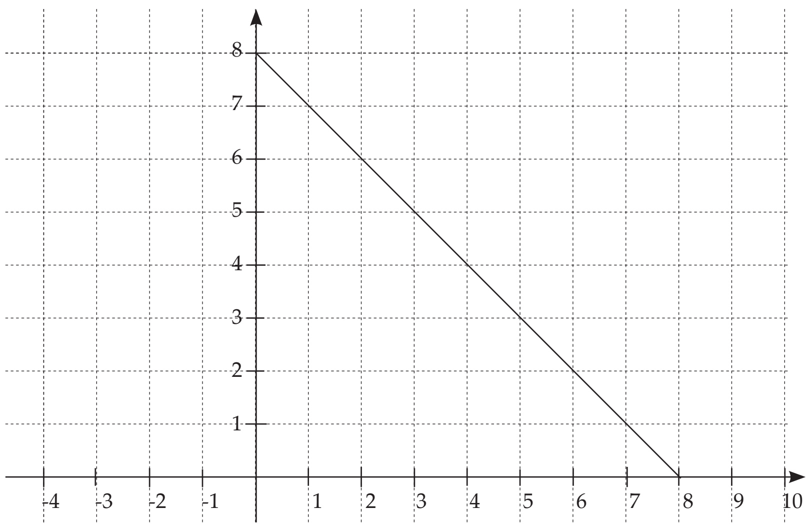


Figura 52

a. Calcule el valor de la pendiente. Interprétela según el problema.
b. Interprete gráficamente la pendiente.
c. Deduzca la función lineal que exprese la altura en términos de la base.
d. Halle $f(2)$ y $f(6)$. Interprételas.

6. 1Cuando conduce hacia abajo en una carretera de montaña, encuentra avisos de peligro que indican que dicha carretera está a "12% grados". Esto significa que la pendiente del camino es $-\frac{12}{100}$. Sobre una extensión del camino su elevación cae 80 metros. ¿Cuál es el cambio horizontal de su posición? **(Figura 53).**

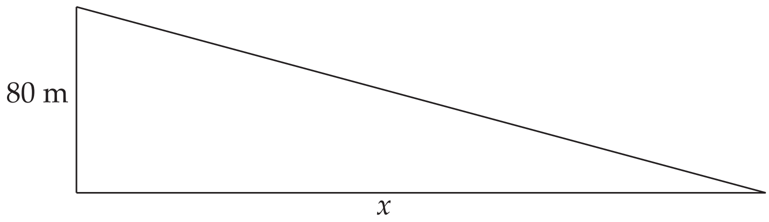


Figura 53

7. La pendiente o caída de un techo es de tal modo que éste se eleva (o cae) 3 pies por cada 4 pies de distancia horizontal. Determine la altura máxima del desván, si la casa tiene 30 pies de ancho. **(Figura 54)** R/ 11,25 pies

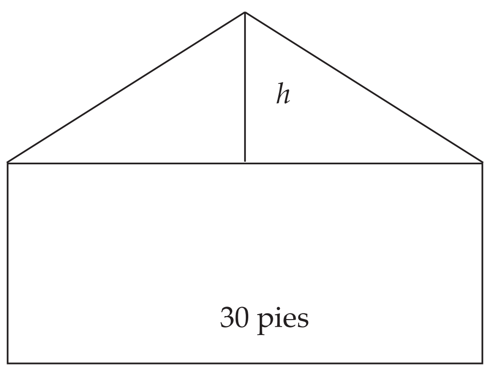


Figura 54

8. Un almacén de repuestos para teléfonos celulares carga el 20% de IVA a cada uno de los precios de lista de los artículos.

- **a.** Escriba una función lineal para el precio total de un artículo en términos del precio de lista.
- **b.** Interprete la pendiente de acuerdo al problema.
- **c.** Si un accesorio tiene un precio de $12 000, ¿cuál es el precio total?

9. Un almacén de ropa está en promoción. Al precio de una prenda le hace un descuento del 30%.
   a. Escriba una función lineal para el precio con el descuento de una prenda en términos del precio inicial.
   b. Interprete la pendiente de acuerdo al problema.
   c. Si una camisa tiene un precio de $45 000, ¿cuál es el precio con el descuento?

10. Determine la variable independiente y la variable dependiente en el siguiente enunciado: *el número de baldosas de cerámica requerido para cubrir el piso de un cuarto es función del área del piso.* Explique su respuesta.

11. Determine si los enunciados usan la palabra *función* de modo *matemáticamente* correcto. Explique.
   a. El impuesto por ventas de un artículo comprado es una función del precio de venta.
   b. Su calificación en el próximo parcial de matemáticas es una función del número de horas que estudia en la noche previa del examen.

12. A partir de la descripción verbal de las siguientes situaciones, identifique la variable independiente y la dependiente e infiera cinco puntos y obtenga la gráfica de la función lineal. Luego deduzca la función lineal e interprete la pendiente.
   a. Una persona paga $100 diarios a un amigo al que le debe $1000.
   b. Se compró una calculadora en $60 000 y se deprecia $10 000 cada año.
   c. A un empleado le pagan $2000 por hora más $500 por cada unidad producida por hora.

13. En un juego de video, un avión vuela de izquierda a derecha siguiendo la trayectoria de la curva dada por $y = 1 + \frac{1}{x}$, tal como lo muestra la **figura 55**:

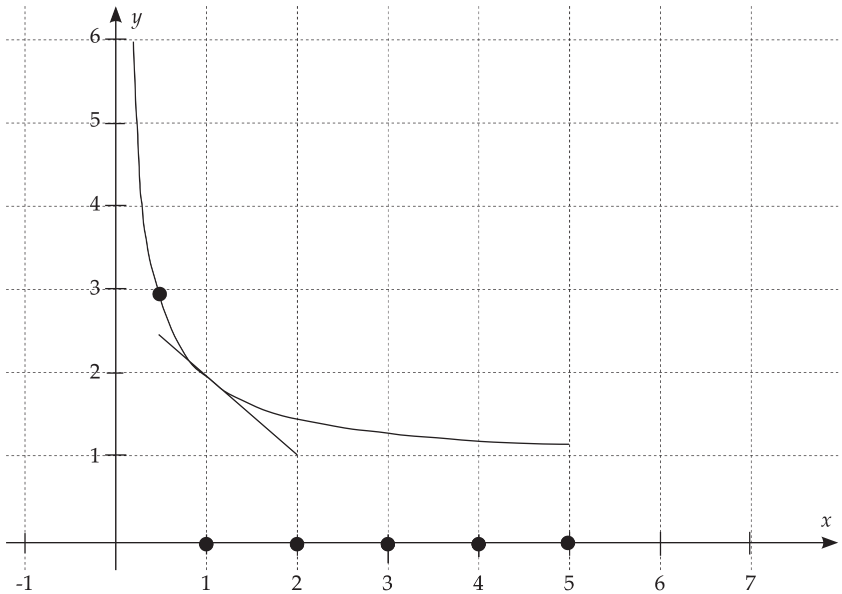


Figura 55

El avión dispara en dirección de la tangente a la curva contra unos objetivos colocados sobre el eje x en $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

a. Si el avión dispara desde el punto (1, 2), ¿le pegará a un blanco?

b. En el punto (½, 3) la pendiente de la recta tangente es $m = -4$. ¿Si el avión dispara desde este punto, hará blanco?

14. Se cortan franjas de ancho x de dos lados adyacentes de un cuadrado que tiene 16 cm de lado, tal como lo muestra la **figura 56:**

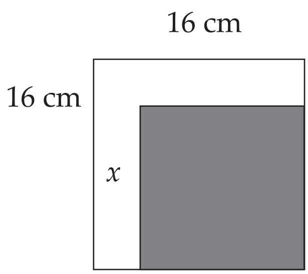
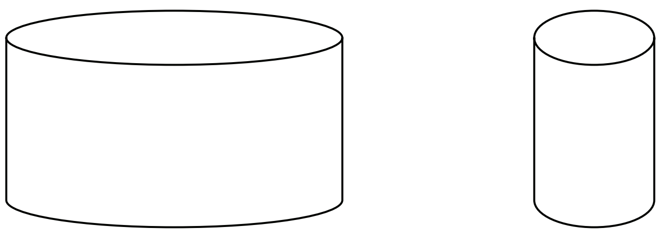


Figura 56

a. Escriba el área A del cuadrado restante en función de x.
b. Interprete la pendiente de acuerdo al problema.
c. ¿Si el ancho de la franja es de 1,5 cm, cuál es el área del cuadrado restante?

15. Los siguientes dos recipientes en forma de cilindros, a) y b), se van a llenar gradualmente de agua. Haga la gráfica, para cada recipiente, de cómo varía el volumen de agua en función de la altura del agua. Es decir, una gráfica en donde la variable independiente es la altura de agua y la variable dependiente el volumen de agua.

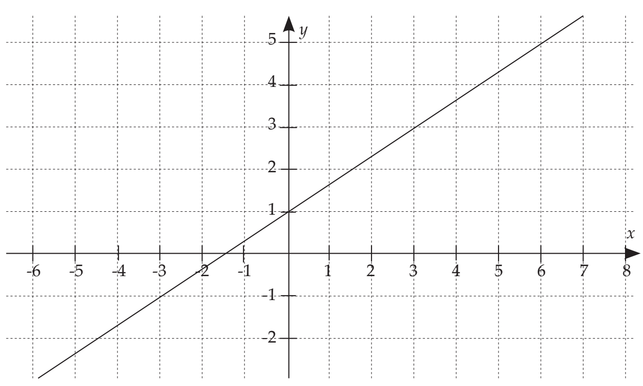


Recipiente a **Recipiente b**

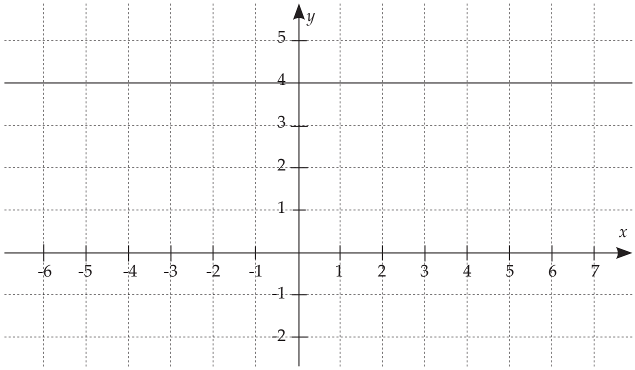
Ejercicios 3.1

En las gráficas 1-5 calcule la pendiente, interprete la correspondiente representación y obtenga la ecuación de la recta.

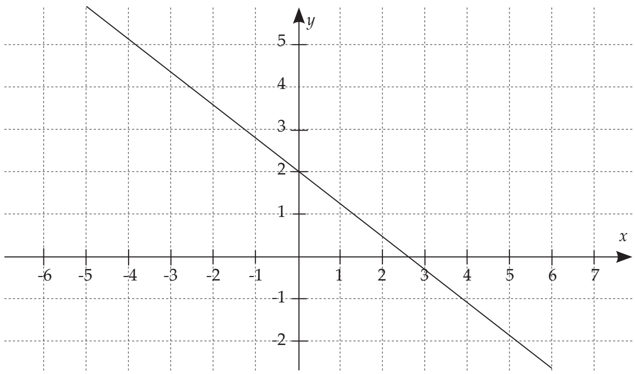
1.



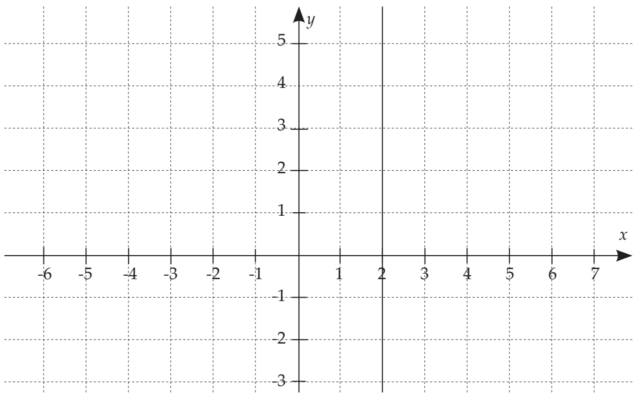
2.


y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7

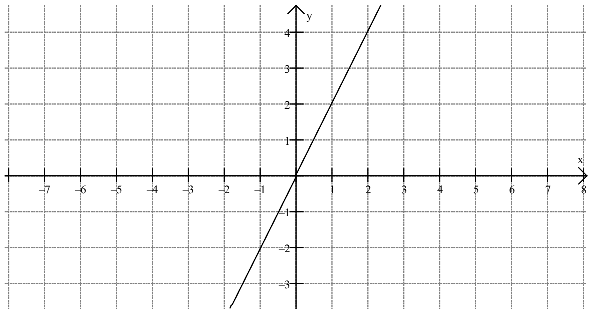
3.


y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7

4.


y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7

5. 1



6. 1Traduzca cada uno de los siguientes enunciados verbales en la respectiva representación algebraica:

a. Sume cuatro al producto de dos y el número dado.
b. Tome la tercera parte del número dado.
c. Tome dos veces el número dado y luego resta ocho.
d. Sume doce a cinco veces el número dado.
e. Reste de quinientos la suma de diez y el número dado.

7. 1Sin usar una variable, escriba una descripción verbal para cada expresión:

a. $5x - 12$
R/____.

b. $\frac{2+x}{5}$
R/____.

c. $3(y + 8)$
R/____.

d. $4\left(\frac{z}{7}\right)$
R/____.

8. 1Determine m y b de forma tal que con la ecuación $y = mx + b$ se obtenga la tabla. ¿Qué representa m? ¿Qué representa b?

a.

x	0	1	2	3	4	5
$y=mx+b$	3	7	11	15	19	23

b.

x	0	1	2	3	4	5
$y=mx+b$	-1	-7	-13	-19	-25	-31

3.2 FUNCIONES POLINOMIALES

Problema

Hay 8 metros de cerca disponibles para encerrar un campo rectangular. Si x denota la base del terreno rectangular y y la altura, una representación tabular de la función que expresa el área del área del terreno en términos de x es:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
A	-12	-5	0	3	4	3	0	-5
Diferencia 1	7	5	3	1	-1	-3	-5	
Diferencia 2	-2	-2	-2	-2	-2	-2		

Las dos filas inferiores de la tabla son las diferencias finitas.

Responda las siguientes preguntas:

1. Diagrame la situación del problema.
R/

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la función que determina el área en términos de x?

a. $A(x) = 4x - x$ **b.** $A(x) = 8$
c. $A(x) = 4x - x^2$ **d.** $A(x) = 4x^2$

3. Haga la gráfica de la función que seleccionó en el inciso **2.**
R/

4. ¿Qué significa $A(1)$?
R/____
____
__________________.

5. Describa verbalmente la función.
R/____
____
________.

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Función polinomial

Una función de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde $a_n \neq 0$ y n es un entero no negativo, es un **polinomio de grado** n. Los números $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ se llaman los **coeficientes** del polinomio, a_0 a_0 es el **coeficiente constante** y a_n es el coeficiente de la potencia más alta y se denomina **coeficiente principal**.

Ejemplo 3.2.1

El siguiente cuadro muestra ejemplos de algunos polinomios o funciones polinomiales:

Polinomio	Grado	Coeficiente constante	Coeficiente principal
$P(x) = 5$	Cero	5	No tiene
$P(x) = -2x + 1$	Uno	-2	1
$P(x) = 3x^2 - 6x$	Dos	No tiene	3
$P(x) = 8x^3 - 5x^2 + 4$	Tres	4	8
$P(x) = -x^4 + 6$	Cuatro	6	-1

Cuando el coeficiente principal es dos, la función se denomina función cuadrática:

Función cuadrática

Una **función cuadrática** es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, y c son números reales y $a \neq 0$. La **gráfica** de una función cuadrática siempre es una **parábola.**
Si $a < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo y tiene un máximo.
Si $a > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba y tiene un mínimo.
En ambos casos, la abscisa del vértice (máximo o mínimo) tiene por coordenada $x = -\frac{b}{2a}$.

Teorema de las diferencias finitas 1

Sea $P(x)$ una función evaluada en diferentes valores de x igualmente espaciados. Si la *n-ésima* **diferencia finita**, $\mathbf{d_n}$, es constante, entonces el polinomio $P(x)$ es de grado n.

Ejemplo 3.2.2

Un alambre de 4 pulgadas de largo se dobla en la forma de un rectángulo con base x y altura y. Una representación tabular de la función que expresa el área del rectángulo en términos de x es:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
A	-8	-3	0	1	0	-3	-8	-15
Diferencia 1	5	3	1	-1	-3	-5	-7	
Diferencia 2	-2	-2	-2	-2	-2	-2		

a. Diagrame la situación del problema.

Solución:

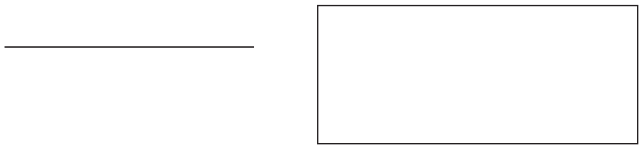


Figura 57

b. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la función que determina el área en términos de x?

1. $A(x) = 2x - x$ **2.** $A(x) = 2x - x^2$
3. $A(x) = 4x - x^2$ **4.** $A(x) = 4$

Solución:

Por el teorema de las diferencias finitas, como la segunda diferencia, $d_{2,}$ es constante, entonces la función debe ser cuadrática y, por lo tanto, las opciones 1 y 4 se descartan. Quedan las opciones 2 y 3.

Para seleccionar la función correcta, escoja primero la opción 2 y hállele algunas imágenes. Si los puntos concuerdan con la segunda fila de la tabla, entonces será la función correcta; de lo contrario, no.

$A(1) = 2(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow (1,1)$
$A(2) = 2(2) - (2)^2 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow (2,0)$

Observe que los puntos obtenidos están en la tabla de valores, por lo tanto la función que expresa el área en términos de x es $A(1) = 2x - x^2$.

c. Calcule $A(0,5)$ e interprete el valor obtenido.

Solución:

$A(0,5) = 2(0,5) - (0,5)^2 = 1 - 0,25 = 0,75$. Esto significa que cuando la base del rectángulo formado con el alambre mide media pulgada, el área del rectángulo es de 0,75 pulgadas cuadradas.

d. Describa verbalmente la función.

Solución:

La función es $A(x) = 2x - x^2$. Su representación verbal es: *duplica el número y luego resta el cuadrado del número.*

e. Grafique la función $A(x) = 2x - x^2$.

Solución:

Para graficar la función $A(x) = 2x - x^2$, que es una parábola, es suficiente con seleccionar tres puntos: (1,1), (2,0) y el vértice (0, 0) y unirlos (**figura 58)**:

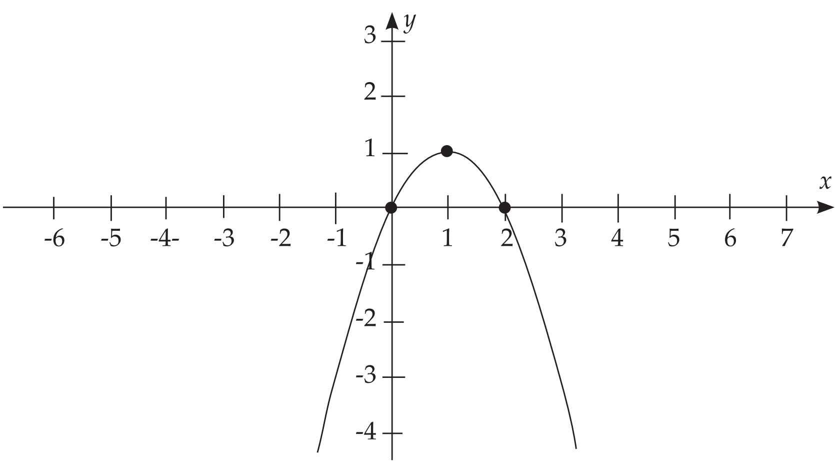


Figura 58

f. Determine el dominio contextual de la función.

Solución:

Para determinar el dominio contextual de la función debemos tener en cuenta que el área no puede ser negativa y tampoco puede tener una longitud negativa la base de un rectángulo. Por lo tanto, cuando se mira la tabla y la gráfica, los únicos valores de x que son positivos y que dan un área positiva son los que están entre 0 y 2. En consecuencia, el dominio contextual de la función $A(x) = 2x - x^2$ es dom $A(x) = \{x/0 \leq x \leq 2, x \in R\}$, que en notación de intervalo es [0, 2].

g. Calcule el área máxima del rectángulo.

Solución:

Para calcular el área máxima del rectángulo, aplique la fórmula $x = -\frac{b}{2a}$, que es la abscisa del vértice. En la función $A(x) = 2x - x^2$, *a=-1* y *b=2*, se reemplaza: $x = -\frac{2}{2(-1)} = -\frac{2}{-2} = 1$. Este valor es la abscisa del vértice. Reemplace este valor en la función: $A(1) = 2(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1$ *pulgada cuadrada.* Luego, el área máxima del rectángulo, 1 pulgada cuadrada, se obtiene cuando la figura es un cuadrado, porque la base mide 1 pulgada.

Ejemplo 3.2.3

Se quiere construir una caja abierta de un trozo de cartón de 4 pulgadas por 3 pulgadas, cortando cuadrados de igual tamaño de lado x de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba.

Una representación tabular de la función que expresa el volumen de la caja en términos de x es:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
V	-112	-30	0	2	0	18	80	210
Diferencia 1	82	30	2	-2	18	62	130	
Diferencia 2	-52	-28	-4	20	44	68		
Diferencia 3	24	24	24	24	24			

a. Diagrame la situación del problema.

Solución:

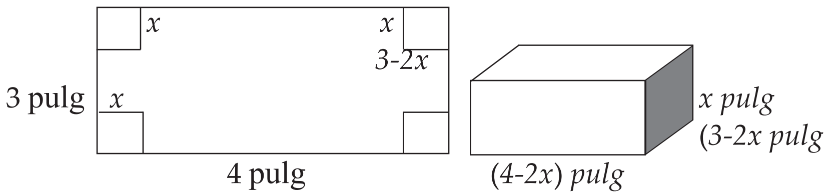


Figura 59

b. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la función que determina el volumen en términos de x?

1. $V(x) = 4x^2 - 14x + 12$ **2.** $V(x) = 4x^3 - 2x^2$
3. $V(x) = 4x - 3x^2$ **4.** $V(x) = 4x^3 - 14x^2 + 12x$

Solución:

Por el teorema de las diferencias finitas, como la tercera diferencia, d_3 es constante, entonces la función debe ser cúbica; por lo tanto, las opciones 1 y 3 se descartan. Quedan las opciones 2 y 4.

Para seleccionar la función correcta, escoja primero la opción 2 y hállele algunas imágenes. Si los puntos concuerdan con la segunda fila de la tabla, entonces será la función correcta; de lo contrario, no.

$V(1) = 4(1)^3 - 2(1)^2 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow (1, 2)$
$V(2) = 4(2)^3 - (2)^2 = 32 - 8 = 24 \Rightarrow (2, 24)$

Observe que el primer punto obtenido, (1, 2) sí está en la tabla de valores, pero el segundo punto (2, 24) no; por lo tanto, la función que expresa el volumen en términos de x no es la de la opción 2. Por descarte, debe ser la opción 4 que se verifica con dos imágenes:

$V(1) = 4(1)^3 - 14(1)^2 + 12(1) = 4 - 14 + 12 = 2 \Rightarrow (1, 2)$
$V(2) = 4(2)^3 - 14(2)^2 + 12(2) = 32 - 56 + 24 = 0 \Rightarrow (2, 0)$

Observe que los dos puntos obtenidos concuerdan con los de la segunda fila de la tabla. Por lo tanto, la función que expresa el volumen en términos de x es $V(x) = 4x^3 - 14x^2 + 12x$.

c. Calcule $V(0, 5)$ e interprete el valor obtenido.

Solución:

$V(0{,}5) = 4(0{,}5)^3 - 14(0{,}5)^2 + 12(0{,}5) = 0{,}5 - 3{,}5 + 6 = 3$. Esto significa que cuando se cortan cuadrados de lado 0,5 pies, el volumen de la caja es de 3 pulgadas cúbicas.

d. Describa verbalmente la función.

Solución:

La función es $V(x) = 4x^3 - 14x^2 + 12x$. Su representación verbal es: *multiplique por cuatro el cubo del número, le resta catorce veces el número al cuadrado y luego sume doce veces el número.*

e. Grafique la función $V(x) = 4x^3 - 14x^2 + 12x$.

Solución:

Para representar la función $V(x) = 4x^3 - 14x^2 + 12x$ que es una curva cúbica **(no todas las curvas cúbicas tiene la misma forma)**, grafique en el plano cartesiano los puntos de la tabla. La gráfica que se obtiene es la **figura 60:**

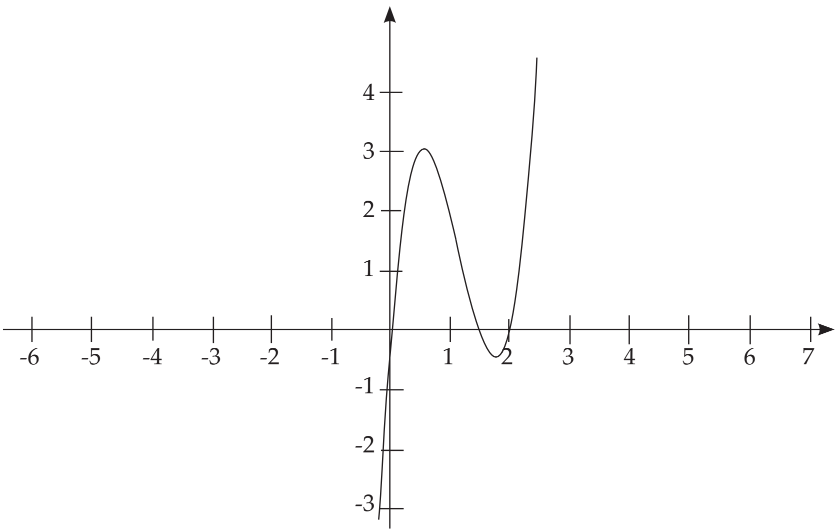


Figura 60

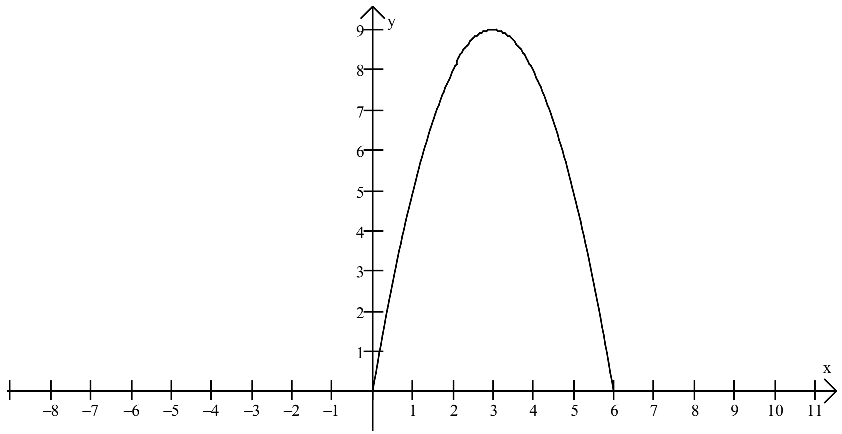
f. Determine el dominio contextual de la función.

Solución:

Para determinar el dominio contextual de la función, se debe considerar que el volumen no puede ser negativo y que el lado de un cuadrado tampoco puede tener una longitud negativa. Por lo tanto, si se mira la tabla y la gráfica, los únicos valores de x que son positivos y que dan un volumen positivo son los que están entre 0 y 1,5. En consecuencia, el dominio contextual de la función $V(x) = 4x^3 - 14x^2 + 12x$ es $\mathrm{dom}V(x) = \{x / 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, x \in R\}$, que en notación de intervalo es [0, 3/2].

Ejemplo 3.2.4

Un alambre de 12 cm se corta en cuatro pedazos para formar un rectángulo cuyo lado más corto mide x. La siguiente curva es la gráfica del área en función de x:



a. Determine el dominio de la función área A a partir de su gráfica.

Solución

La gráfica sólo está en el primer cuadrante y corta al eje X en $x = 0$ y $x = 6$, luego el dominio de la función es el conjunto de números reales entre 0 y 6. Es decir, $domV = \{x / 0 \leq x \leq 6\} = [0, 6]$

b. Utilice la gráfica para estimar el área máxima del rectángulo y sus dimensiones.

Solución

De la gráfica se obtiene que el máximo es el punto (3, 9), luego el lado más pequeño mide 3cm y el área es de 9 cm^2. Como 9 es 3^2, las dimensiones del rectángulo que maximizan su área son *base = 3 cm* y *altura = 3 cm.*

Aplicaciones

1. Se tienen 10 metros de cerca para hacer un corral rectangular que luego se dividirá por la mitad. La división también tendrá valla. Si x denota la base del rectángulo y y la altura y la división del terreno rectangular, una representación tabular de la función que expresa el área del terreno rectangular en términos de x es:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
A	-4	0	8/3	4	4	8/3	0	-4
Diferencia 1								
Diferencia 2								
Diferencia 3								

a. Diagrame la situación del problema.

b. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la función que determina el área en términos de x?

1. $A(x)=\frac{10}{3}x-\frac{2}{3}x^2$ **2.** $A(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2$

3. $A(x) = 10x - 2x^2$ **4.** $A(x) = 10x^3 - 2x^2$

c. Calcule $A(2)$ e interprete el valor obtenido.

d. Describa verbalmente la función.

e. Grafique la función.

f. Determine el dominio contextual de la función.

g. Determine el valor de x que maximiza el área. ¿Cuál es el área máxima?

2. Se quiere construir una caja abierta de un trozo de cartón de 4 pies por 4 pies, cortando cuadrados de igual tamaño de lado x de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba.
Una representación tabular de la función que expresa el volumen de la caja en términos de x es:

x	-1	0	1	2	3	4
V	-36	0	4	-0	12	64
Diferencia 1						
Diferencia 2						
Diferencia 3						

a. Diagrame la situación del problema.
b. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la función que determina el volumen en términos de x?
   1. $V(x) = 4x^2 - 16x + 16$ **2.** $V(x) = 4x^3 - 16x^2$
   3. $V(x) = 4x - 16x^2$ **4.** $V(x) = 4x^3 - 16x^2 + 16x$
c. Calcule $V(1)$ e interprete el valor obtenido.
d. Describa verbalmente la función.
e. Grafique la función.
f. Determine el dominio contextual de la función.

3. Se tienen 12 metros de cerca para hacer un corral rectangular que luego se dividirá en tres, con cercas paralelas colocadas a uno de los lados del rectángulo. Si x denota la base del rectángulo y y la altura y las divisiones del terreno rectangular, una representación tabular de la función que expresa el área del terreno rectangular en términos de x es:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
A	-8	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0	-3,5
Diferencia 1									
Diferencia 2									
Diferencia 3									

a. Diagrame la situación del problema.
b. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la función que determina el área en términos de x?

   1. $A(x) = 3x - \frac{1}{2}x^3$ **2.** $A(x) - 12x^3$

3. $A(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$ **4.** $A(x) = \frac{1}{2}x - 3x^2$

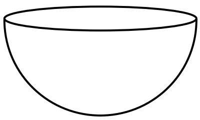
c. Calcule $A(5)$ e interprete el valor obtenido.
d. Describa verbalmente la función.
e. Grafique la función.
f. Determine el dominio contextual de la función.
g. Determine el valor de x que maximiza el área. ¿Cuál es el área máxima?

4. Una empresa de correos establece que los paquetes enviados en forma de prisma cuadrangular deben cumplir las siguientes características: la suma del perímetro de la sección transversal, que es un cuadrado, y de la altura del paquete, no debe superar 8 pies. Si x es la arista de la base cuadrada y y la altura del paquete, una representación tabular que expresa el volumen del paquete en función de x es:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
V	-64	12	0	4	0	-36	-128	-300
Diferencia 1								
Diferencia 2								
Diferencia 3								

a. Diagrame la situación del problema.
b. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la función que determina el volumen en términos de x?
1. $V(x) = 8x^2 - 4x$ **2.** $V(x) = 4x^3 - 8x^2$
3. $V(x) = 8x - 4x^2$ **4.** $V(x) = 8x^2 - 4x^3$
c. Calcule $V(1)$ e interprete el valor obtenido.
d. Describa verbalmente la función.
e. Grafique la función.
f. Determine el dominio contextual de la función.

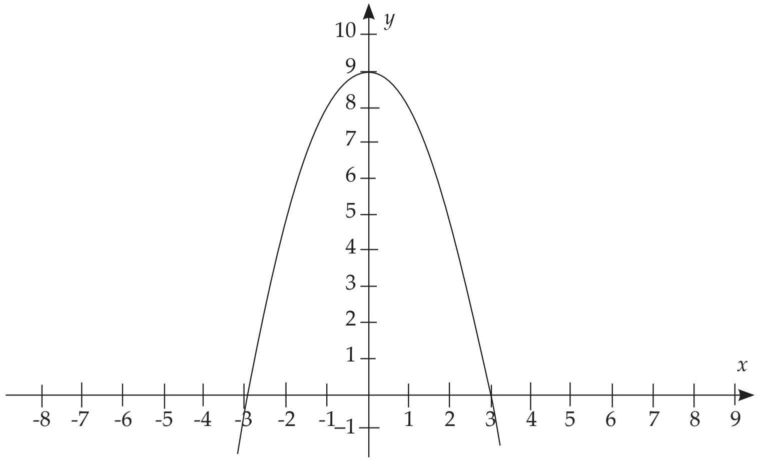
5. Un recipiente semiesférico se llena gradualmente de agua. Haga un bosquejo de la gráfica si la variable independiente es la altura del agua y la variable dependiente es el área de la superficie del líquido.



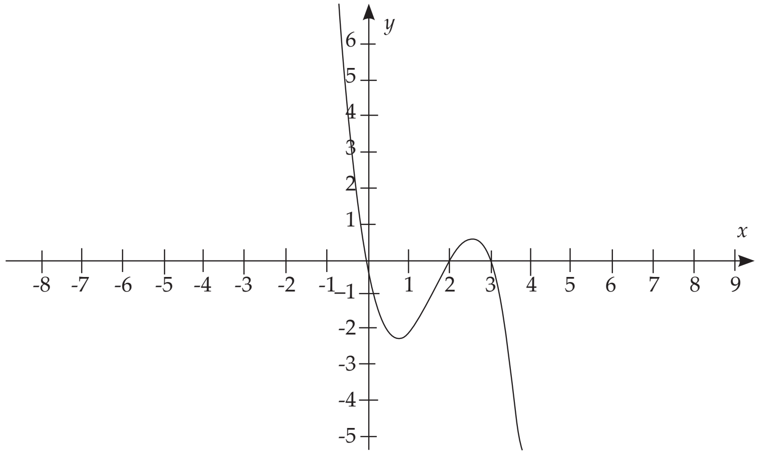
Ejercicios 3.2

Clasifique las gráficas 1-4 en funciones cuadráticas o cúbicas y justifique su respuesta.

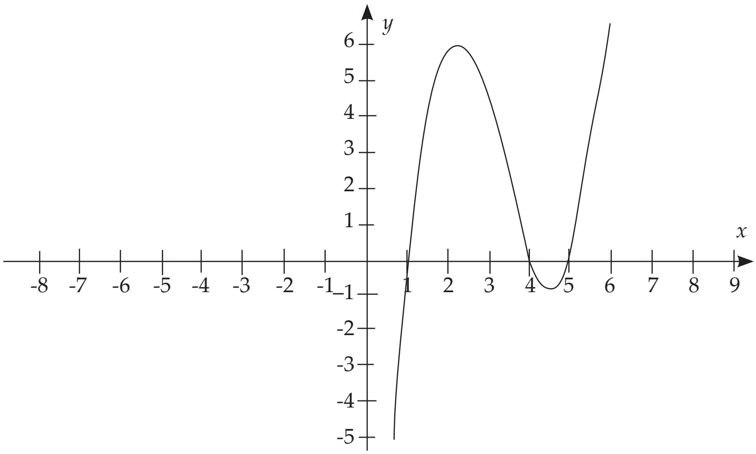
1.



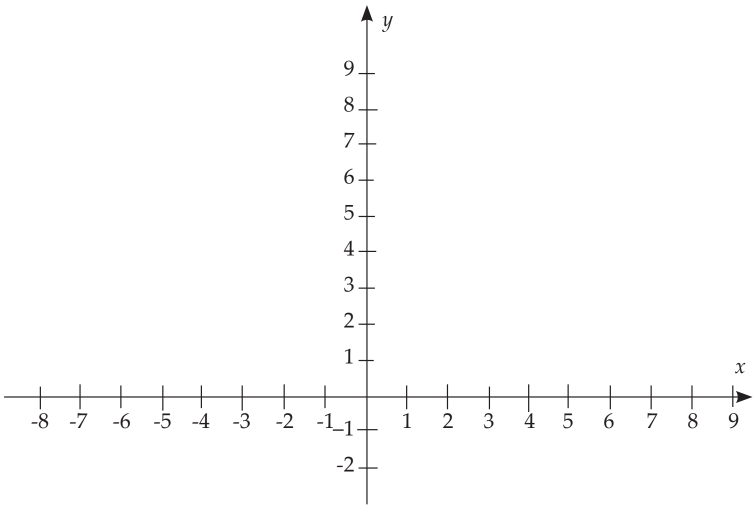
2.



3.


y
6
5
4
3
2
1
x
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9
-1
-2
-3
-4
-5

4.


y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9
-1
-2

3.3 ECUACIONES LINEALES

? Problema

Un alumno obtuvo en los primeros tres parciales las siguientes calificaciones: 2,5; 3,8 y 3,0, respectivamente. Cada uno de los tres parciales y el examen final tienen el mismo porcentaje.

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué calificación debe obtener el alumno en el examen final para ganar la asignatura con 3,0?
R/____

2. ¿Y si quiere ganar la asignatura con 3,5?
R/____

3. ¿Qué planteó para responder a las anteriores preguntas? ¿Cómo se llama la medida que se utilizó para resolver el problema?
R/____

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Definición:

Una **ecuación** es un enunciado que iguala dos expresiones matemáticas.

Ejemplo 3.3.1

$x^2 + 8 = 6x$, $\quad 2(t - 5) = 5 - 4t$, $\quad \frac{2}{y+1} - 6 = \frac{5}{y}$ $\quad \frac{x}{x} = 1$

Son ejemplos de ecuaciones.

Las expresiones que aparecen en ambos lados del signo de igualdad reciben el nombre de **lados** o **miembros** de la ecuación.

A la variable de una ecuación se le denomina **incógnita.**

El **dominio** de una variable en una ecuación es el conjunto de números para los que se definen las expresiones algebraicas en tal ecuación. En otras palabras, es el conjunto de valores que al reemplazarlos en la ecuación, hacen de ella un enunciado falso o verdadero.

Ejemplo 3.3.2

- El dominio de la ecuación $\frac{x}{x} = 1$ es el conjunto de todos los números reales, excepto el 0, porque el primer miembro no está definido para dicho valor. La ecuación se convierte en un enunciado verdadero si reemplazamos la x por cualquier número, excepto el cero.

- El dominio de la ecuación $2(t - 5) = 5 - 4t$ es el conjunto de los números reales, porque al reemplazar cualquier valor, la expresión está definida. Si se reemplaza la variable t por 2, la ecuación se convierte en el enunciado –6 = 1, que es falso. Pero si se reemplaza la variable t por $\frac{5}{2}$, la ecuación se convierte en el enunciado –5 = –5, que es verdadero.

- ¿Qué valores de x hacen falsa la ecuación $x^2 + 8 = 6x$?¿Y verdadera? ¿Cuál es su dominio?
  R/____

- ¿Qué valores de y hacen falsa la ecuación $\frac{2}{y+1} - 6 = \frac{5}{y}$? ¿Y verdadera? ¿Cuál es su dominio?
  R/____

Al número que hace de una ecuación un enunciado verdadero se le llama **solución** o **raíz** de la ecuación. El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de **conjunto solución.** Un número que es una solución se dice que **satisface la ecuación. Resolver una ecuación** quiere decir hallar todas sus soluciones.

Ejemplo 3.3.3

- El conjunto solución de $\frac{x}{x} = 1$ es el conjunto $S = \{x/x \neq 0, x \in R\}$, o sea, cualquier número real distinto de cero.

- El conjunto solución de $2(t–5)=5–4t$ es el conjunto unitario $t = \frac{5}{2}$ porque es el único número que hace de la ecuación $2(t–5) = 5 – 4t$ un enunciado verdadero.

- ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $x^2 + 8 = 6x$?
  R/____

- ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $\frac{2}{y+1} - 6 = \frac{5}{y}$?
  R/____

En el proceso de búsqueda de soluciones de ecuaciones se pueden cometer errores debido a varios factores. Por consiguiente, conviene comprobar el conjunto solución reemplazándolo en la ecuación original.

Una ecuación en la que el dominio y el conjunto solución son iguales, se denomina **identidad.** Si existe por lo menos un valor del dominio que no pertenece al conjunto solución, entonces la ecuación se denomina **ecuación condicional.**

Ejemplo 3.3.4

Del ejemplo 3.3.2 y 3.3.3 se infiere que la ecuación $\frac{x}{x} = 1$ es una identidad porque el dominio y el conjunto solución es el mismo conjunto; mientras tanto, la ecuación $2(t - 5) = 5 - 4t$ es una ecuación condicional dado que, por ejemplo, el número 4 está en el dominio pero no en el conjunto solución. Esto es: conjunto solución $\subset$ dominio.

¿Qué tipo de ecuaciones son $x^2 + 8 = 6x$ y $\frac{2}{y+1} - 6 = \frac{5}{y}$, respectivamente? Explique.
R/ ____

Un tipo importante de ecuación es la ecuación polinomial de una variable, que se escribe en la forma $P = 0$, donde P es un polinomio en una variable.

Definición:

Una **ecuación polinomial** (en x) **general de grado** n ($n \geq 1$) es la ecuación $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

Ejemplo 3.3.5

Las siguientes ecuaciones son ejemplos de ecuaciones polinomiales en una variable:

- $8x - 15 = 0$ (ecuación polinomial de primer grado o ecuación lineal)

- $2y^2 - 3y + 5 = 0$ (ecuación polinomial de segundo grado o ecuación cuadrática)
- $4z^3 - z^2 + 8z \neq 2 = 0$ (ecuación polinomial de tercer grado o ecuación cúbica)

En el presente texto sólo se estudia la ecuación lineal.

Definición

Una ecuación de la forma $ax + b = 0$ donde a y b son números reales y $a \neq 0$ se denomina **ecuación lineal**.

Ejemplo 3.3.6

Son ejemplos de ecuaciones lineales:

- $3x - 4 = 0$
- $4y - 5 = 7 - 9y$
- $4(t - 6) = 8 - 5t$
- $\frac{3}{8} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{x}$

A pesar que la mayoría no tiene exactamente la forma $ax + b = 0$, sí pueden ser reducidas a esa forma cuando se resuelven.

En la solución de ecuaciones se aplican las propiedades de los números reales estudiadas en la unidad 2, aunque este proceso no se hace con frecuencia por lo su extensión. Como ejemplo de la aplicación de dichas propiedades está la demostración del siguiente teorema:

TEOREMA

La ecuación lineal $ax + b = 0$ tiene exactamente una solución: $-\frac{b}{a}$.

Demostración

$ax + b = 0$	**Dado.**
$ax + b - b = 0 - b$	**Propiedad uniforme de la adición.**
$ax + (b - b) = 0 - b$	**Propiedad asociativa de la adición.**
$ax + 0 = 0 - b$	**Propiedad del inverso aditivo.**
$ax = -b$	**Propiedad modulativa de la adición.**
$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a}(-b)$	**Propiedad uniforme de la multiplicación.**
$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) x = \frac{1}{a}(-b)$	**Propiedad asociativa del producto.**
$(1)\, x = \frac{1}{a}(-b)$	**Propiedad del inverso multiplicativo.**
$x = \frac{1}{a}(-b)$	**Propiedad modulativa del producto.**
$x = -\frac{b}{a}$	**Teorema de los signos y p. clausurativa.**

Ejemplo 3.3.7

Despeje x en la ecuación $1 - 3(2x - 4) = 4(6 - x) - 8$

Solución:

1) $1 - 3(2x - 4) = 4(6 - x) - 8$ **Por la propiedad distributiva:**

2) $1–6x + 12 = 24 – 4x – 8$ **Por la propiedad clausurativa:**
3) $13 – 6x = 16 – 4x$ **Se suma a cada miembro $4x – 13$:**
4) $–2x = 3$ **Se divide cada miembro entre -2:**
5) $x = -\frac{3}{2}$

Para comprobar la solución, reemplace $x = -\frac{3}{2}$ en la ecuación $1–3(2x – 4) = 4(6 – x) – 8$ y obtendrá la expresión $22 = 22$, que es verdadera.

Ecuaciones equivalentes son ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución. Por lo tanto, en el ejemplo anterior las ecuaciones 1), 2), 3), 4) y 5) son equivalentes.

El método que se utilizó para resolver la ecuación anterior consiste en reemplazar la ecuación por una serie de ecuaciones equivalentes, cada vez más sencillas hasta llegar a la solución. Esto se obtiene, como se observó en el ejemplo 3.3.7, aplicando las propiedades de los números reales.

Ejemplo 3.3.8

Las calificaciones de un alumno en los tres primeros parciales son 3,2; 2,8 y 3,5. ¿Qué calificación debe obtener en el examen final para que la nota definitiva le quede en 3,0 si cada examen tiene el mismo porcentaje?

Solución:

Para resolver el problema, se necesita de una *medida de tendencia central* denominada **media aritmética** o **promedio** (conocida también como la media) cuya fórmula es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n}$$

En palabras, la media aritmética de un conjunto de números se calcula sumando los números y dividiendo después entre la cantidad de números.

Es aplicable la media en este problema porque cada calificación tiene el mismo porcentaje, o sea, 25%.

Lo **primero** que se debe hacer es introducir la variable: sea x la calificación del examen final.

Segundo: plantear la ecuación: $\frac{3{,}2 + 2{,}8 + 3{,}5 + x}{4} = 3$

Tercero: resolver la ecuación:

$\frac{3{,}2 + 2{,}8 + 3{,}5 + x}{4} = 3$ **Por la propiedad clausurativa:**

$\frac{9{,}5 + x}{4} = 3$ **Se multiplican ambos miembros por 4:**

$9{,}5 + x = 12$ **Se restan en ambos miembros 9,5:**

$x = 2{,}5$

Cuarto: comprobar la respuesta:

$\frac{3{,}2 + 2{,}8 + 3{,}5 + 2{,}5}{4} = 3 \Rightarrow \frac{12{,}0}{4} = 3{,}0 \Rightarrow 3{,}0 = 3{,}0$ lo cual es verdadero, por lo tanto, la respuesta obtenida es la solución al problema.

Quinto: Responder a la pregunta del problema: el alumno debe obtener en el examen final 2,5 para ganar la asignatura con 3,0.

Ejemplo 3.3.9

Un alumno obtuvo en el primer parcial 4,2; en el segundo, 2,8 y en el tercero, 3,4. Si los porcentajes de los parciales son 20%, 25% y 30% respectivamente, ¿cuál debe ser la calificación que debe obtener en el examen final para ganar la asignatura con 3,0?

Solución:

En este problema no se puede aplicar la fórmula del promedio porque el porcentaje no es el mismo para cada uno de los parciales.

Sea x la calificación del examen final.

El examen final tiene un porcentaje del 25% porque la suma de los porcentajes de los tres primeros es 75% y el total debe ser 100%. Por lo tanto, la ecuación es:

$(0,2)\,4,2 + (0,25)\,2,8 + (0,3)\,3,4 + 0,25x = 3,0$	**por la propiedad clausurativa:**
$0,84 + 0,7 + 1,02 + 0,25x = 3,0$	**por la propiedad clausurativa:**
$2,56 + 0,25x = 3,0$	**Se resta 2,56:**
$0,25x = 0,44$	**Se divide por 0,25:**
$x = 1,76$	

Compruebe la respuesta obtenida:

$(0,2)\,4,2 + (0,25)\,2,8 + (0,3)\,3,4 + (0,25)\,1,76 = 3,0$
$0,84 + 0,7 + 1,02 + 0,44 = 3,0 \Rightarrow 3,0 = 3,0$ lo que es verdadero.

R/ La calificación que el alumno debe obtener en el examen final para ganar la asignatura con 3,0 es 1,8.

Ejemplo 3.3.10

Una página tiene impresa un área rectangular de base 10 cm y altura 14 cm. El margen superior, inferior y los laterales son iguales. Si el perímetro de la página es 1,5 veces el perímetro de la región impresa, calcule el margen y las dimensiones de la página.

Solución:

Como el problema es geométrico, es necesario hacer un diagrama de la situación **(figura 61)**:

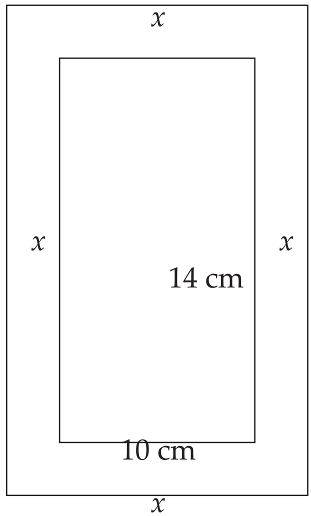


Figura 61

El diagrama debe contener la variable del problema. En este caso x (en cm) es el margen de la página.

Como el perímetro de la página es 1,5 veces el perímetro de la región impresa, por definición de perímetro:

$2\ (10 + 2x) + 2\ (14 + 2x) - 1{,}5\ (48)$ **Por la propiedad distributiva y clausurativa:**

$20 + 4x + 28 + 4x - 72$ **Se reducen los términos semejantes:**

$48 + 8x = 72$ **Se restan 48 en ambos miembros:**

$8x = 24$ **Se dividen entre 8 ambos miembros:**

$x = 3$

Se comprueba $x = 3$ en la ecuación original:

$2\ (10 + 2 \cdot 3) + 2\ (14 + 2 \cdot 3) - 1{,}5\ (48) \Rightarrow 2\ (10 + 6) + 2\ (14 + 6) = 72$

$2\ (16) + 2\ (20) = 72 \Rightarrow 32 + 40 = 72 \Rightarrow 72 = 72$ lo que es verdadero.

R/ El margen de la página es de 3 cm.

Para calcular las dimensiones de la hoja: se reemplaza $x = 3$ en la base y la altura de la página:

Base = 10 + 2 (3) = 16 *cm* y *altura* = 14 + 2 (3) = 20 *cm*
R/ Las dimensiones de la página son: base de 16 cm y altura de 20 cm.

Aplicaciones

1. La fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$ expresa los grados Celsius en función de los grados Fahrenheit.
  a. Calcule la temperatura en la cual ambas escalas indican el mismo valor numérico.
  b. Despeje en la fórmula dada los grados Celsius.
  c. Calcule la temperatura en que la lectura en Fahrenheit es el doble de la lectura en Celsius.

2. Un alumno obtuvo en los tres primeros exámenes de una asignatura las siguientes calificaciones: 2,8; 3,5 y 4,0. ¿Qué calificación debe obtener en el examen final para ganar la asignatura con 3,0 si cada una de las cuatro calificaciones tiene el mismo porcentaje?

3. Un alumno obtuvo en los tres primeros exámenes de una asignatura las siguientes calificaciones: 1,0; 3,0 y 2,5. ¿Qué calificación debe obtener en el examen final para ganar la asignatura con 3,0 si cada una de las cuatro calificaciones tiene el mismo porcentaje?

4. Un alumno obtuvo en los tres primeros exámenes de una asignatura las siguientes calificaciones: 3,8; 4,5 y 4,0. ¿Qué calificación debe obtener en el examen final para ganar la asignatura con 3,0 si cada una de las cuatro calificaciones tiene el mismo porcentaje?

5. 1Un alumno obtuvo en el primer parcial 4,5; en el segundo, 2,0 y en el tercero, 3,2. Si los porcentajes de los parciales son 15%, 25% y 30% respectivamente, ¿cuál debe ser la calificación que debe obtener en el examen final para ganar la asignatura con 3,0?

6. Un alumno obtuvo en el primer parcial 1,2; en el segundo, 2,8 y en el tercero, 3,2. Si los porcentajes de los parciales son 25%, 30% y 25%, respectivamente, ¿cuál debe ser la calificación que debe obtener en el examen final para ganar la asignatura con 3,0?

7. Un alumno obtuvo en el primer parcial 4,0; en el segundo, 3,8 y en el tercero, 4,4. Si los porcentajes de los parciales son 30%, 20% y 25%, respectivamente, ¿cuál debe ser la calificación que debe obtener en el examen final para ganar la asignatura con 3,0?

8. Usted que prefiere: ¿que al precio de un artículo le carguen el 16% del IVA y después le hagan el 10% de descuento o que primero le hagan el 10% de descuento y después le carguen el 16% del IVA? Justifique su respuesta.

9. Un par de zapatos vale $29 900 con el IVA del 16% incluido. En una promoción, el vendedor le dice que si usted calcula el precio del par de zapatos sin IVA, se lo venden al precio sin IVA. ¿Cuál es el precio del par de zapatos sin IVA?

10. Suponga que el IVA para automóviles es del 30%. Para incentivar la compra de automóviles, el gobierno decide reducir el IVA al 20%. Si un modelo de una marca específica costaba $40 000 000, con el IVA incluido, ¿cuál será el precio con la reducción del impuesto?

11. Un artículo que vale ahora mismo $5800 ha tenido anteriormente dos incrementos: el primero, del 5% y el segundo, del 10%. ¿Cuánto costaba el artículo antes de los dos aumentos? ¿Cuál es el incremento en porcentaje?

12. Una página tiene impresa un área rectangular de base 12 cm y altura 16 cm. Los márgenes superior, inferior y los laterales son iguales. Si el perímetro de la página es 1,2 veces el perímetro de la región impresa, calcule el margen y las dimensiones de la página. Después de encontrar la solución, haga el dibujo a escala real del problema.

13. Una persona pegó una foto de un paisaje de papel de 20 cm de base y 15 cm de altura en un pedazo de cartulina rectangular de tal forma que queda un margen constante alrededor de la foto. Si el perímetro de cartulina es de 102 cm, calcule el margen alrededor de la foto. Después de encontrar la solución, haga el dibujo a escala real del problema.

14. Un instructor pone un trabajo escrito que vale la mitad de la sustentación oral para definir así la calificación del examen final. ¿Cuál es el porcentaje que debe asignar al trabajo y a la sustentación? ¿Cuál es el porcentaje de cada uno, si el valor de la sustentación es el triple del valor del informe escrito?

15. Calcule la longitud del lado de un cuadrado sabiendo que si este se aumenta en 1cm, el área del cuadrado se incrementa en 4 cm^2. Después de encontrar la solución, haga el dibujo a escala real del problema, antes y después del incremento.

Ejercicios 3.3

En los ejercicios 1-10 despeje la variable indicada en términos de las variables restantes:

1. $PV = nRT$ para R

2. $A = \frac{1}{2}bh$ para h

3. $C = 2\pi r$ para r

4. $P = 2x + 2y$ para x

5. $1A = 2x^2 + 4xy$ para y

6. $1V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para h

7. $S=\dfrac{a}{1-r}$ para r

8. $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$ para n

9. $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$ para R_1

10. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ para y

Resuelva las ecuaciones 11-20:

11. $7x+7=2(x+1)$
12. $3(y+2)=8y+1$
13. $3(x+4)-2(x-1)=13$
14. $x=2-2[2x-3(1-x)]$

15. $1\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=8$

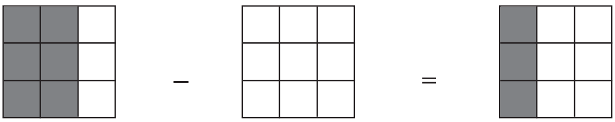
16. $-2\,[w-(5-4w)]+4=\ -3w$

17. $\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2}{x}$

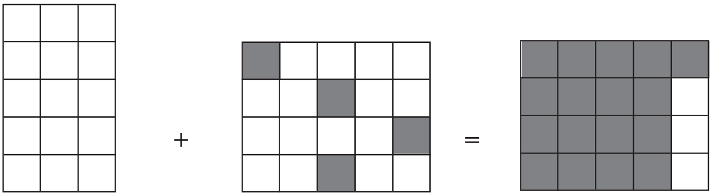
18. $(x-7)^2-4=(x+1)^2$
19. $(4x-3)(2x+3)-8x\,(x-4)=0$
20. $(3x-1)^2-(5x-3)^2=-(4x-2)^2$

En los ejercicios 21-24, plantee la ecuación con números racionales simplificados y soluciónela. Represente la solución en la cuadrícula sombreando las que sean necesarias.

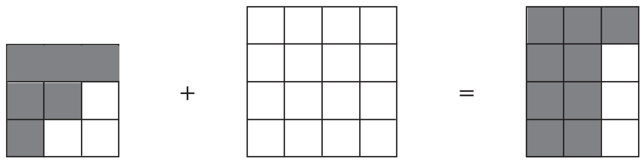
21.



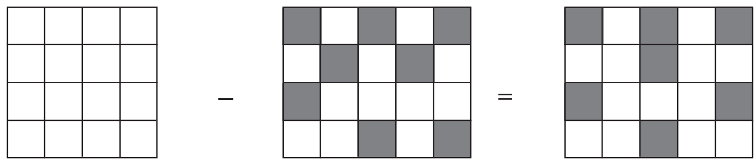
22.



23.



24.



Acertijos

1. Sustituya las letras diferentes de las tres palabras siguientes por los diez dígitos decimales, de modo que la suma resulte correcta:

$$\begin{array}{r} DONALD \\ +\,GERALD \\ \hline ROBERT \end{array}$$

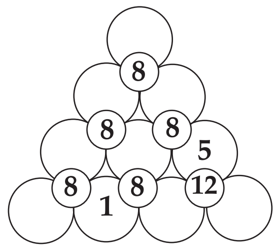
donde $D = S$

2. Encuentre una solución del siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned}
U+N+O &= 1000 \\
D+O+S &= 2000 \\
T+R+E+S &= 3000 \\
C+U+A+T+R+O &= 4000 \\
C+I+N+C+O &= 5000 \\
S+E+I+S &= 6000 \\
S+I+E+T+E &= 7000 \\
O+C+H+O &= 8000 \\
N+U+E+V+E &= 9000 \\
D+I+E+Z &= 10\,000
\end{aligned}$$

3. Un alumno puede obtener notas de 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5 y 5,0. Si la nota definitiva del alumno es en promedio mayor que 3,6 y menor que 3,7, y son cuatro, ¿cuál es el promedio que obtuvo?

4. Escriba dos veces cada número, del 1 al 5, en las casillas vacías, para que cada grupo de tres sume lo que se indica.



BIBLIOGRAFÍA

HAEUSSLER, Ernest & PAUL, Richard (2003). *Matemáticas para administración y economía* (10.ª Ed.). México: Pearson.

LARSON, Roland, HOSTETLER, Robert & NEPTUNE, Carolyn. *Álgebra intermedia* (2.ª Ed.). México: McGraw-Hill.

LEITHOLD, Louis (1994). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Harla.

REES, Paul, SPARKS, Fred & REES, Charles (2000). *Álgebra* (10.ª Ed.). México: McGraw-Hill.

STEWART, James, REDLIN, Lothar & WATSON, Saleem (2001). *Precálculo* (3.ª Ed.). México: Thomson.

SWOKOWSKI, Earl & COLE, Jeffery (2001). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (10.ª Ed.). México: Thomson.

TAYLOR, Howard & WADE, Thomas (1989). *Matemáticas Básicas con vectores y matrices*. México: Limusa.

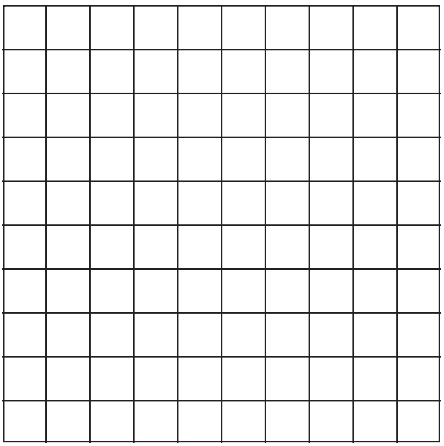
Unidad 4
VARIACIÓN

Contenido

4.1 VARIACIÓN

Problema

Construya cuadrados de 1 cm, 2 cm y 3 cm de lado en la siguiente cuadrícula:



Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos cuadrados de 1 cm^2 tiene cada figura? Haga una tabla de valores para la medida del lado y el área.
   R/

2. Grafique en un diagrama cartesiano de *área vs. medida del lado* los datos de la tabla y únalos. ¿Cómo se llama la curva que obtuvo? ¿Qué sucede con el área cuando la medida del lado aumenta?
R/

3. Calcule el perímetro de cada uno de los cuadrados. Haga una tabla de valores para la medida del lado y el perímetro.
R/

4. Grafique en un diagrama cartesiano de *perímetro vs. medida* del lado los datos de la tabla y únalos. ¿Cómo se llama la curva que obtuvo? ¿Qué sucede con el perímetro cuando la medida del lado aumenta?
R/

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

En una relación funcional como $y = f(x)$, un cambio en la variable independiente x generalmente causa un cambio en la variable dependiente y y viceversa. Entonces se dice que y varía con x o que x varía con y. Esta correspondencia se denomina **variación funcional.**

Definición:

El enunciado y **varía directamente con** x significa que $y = k\,x$, para algún número real $k \neq 0$.   El número k es la **constante de variación** o la **constante de proporcionalidad**.

Ejemplo 4.1.1

En el problema planteado al inicio de esta sección, decimos que el perímetro de un cuadrado es directamente proporcional a la longitud del lado. Si el perímetro de un cuadrado de 2 cm de lado es 8 cm...

a. Deduzca la expresión para calcular el perímetro de un cuadrado.
b. Calcule el perímetro de un cuadrado de 15 cm de lado.
c. Grafique la función obtenida en **a.**

Solución:

a. Si l es la longitud del lado y P el perímetro del cuadrado, entonces $P = kl$. Se reemplazan $P = 8\ cm$ y $l = 2\ cm$: $8\ cm = k\ 2\ cm$, **despejáse** k:

$$k = \frac{8\,cm}{2\,cm} \qquad \Rightarrow \qquad k = 4$$

Por lo tanto, la expresión es $P = 4l$

b. Para calcular el perímetro del cuadrado de 15 cm de lado, se reemplaza en la expresión anterior dicho valor: $P = 4(15\text{ cm}) = 60\text{ cm}$.
El perímetro de un cuadrado de 15 cm de lado es de 60 cm.

c. La gráfica de $P = 4l$ es la siguiente **figura 62**:

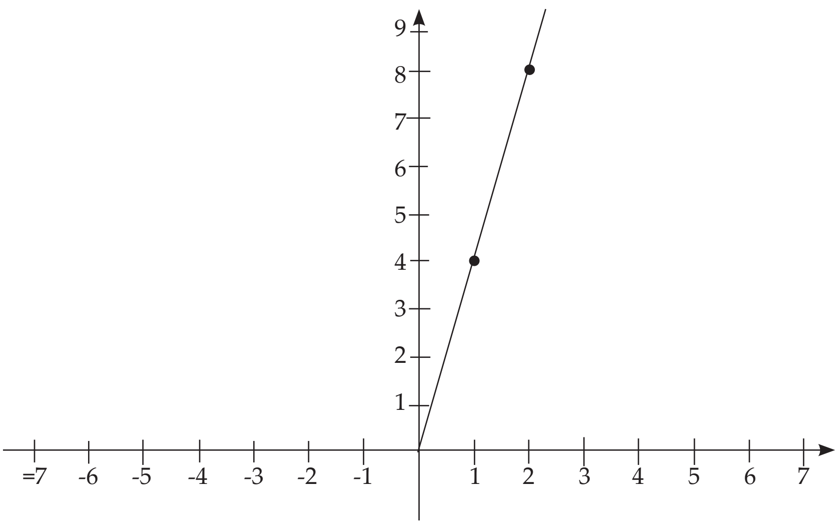


Figura 62

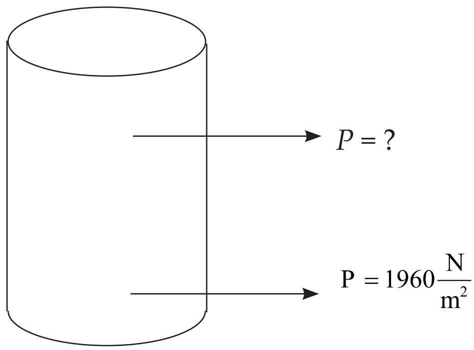
En la gráfica están señalados dos de los puntos hallados en el problema del inicio de esta sección: (1, 4) y (2, 8). No hay recta en el tercer cuadrante porque el lado de un cuadrado nunca es negativo.

Ejemplo 4.1.2

La presión manométrica en un punto de un líquido es directamente proporcional a la distancia de la superficie del líquido al punto.

La presión en el fondo de un recipiente cilíndrico de 20 cm de altura cuando se llena de agua es de 1960 N/m^2. ¿Cuál es la presión a una profundidad de 5 cm?

Solución:



De acuerdo al enunciado: $P = kd$, se reemplazan valores, teniendo en cuenta que 20cm = 0,20m: $1960 \frac{N}{m^2} = k(0{,}2\,m)$ **despéjase** k:

$k = \dfrac{1960 \frac{N}{m^2}}{0{,}2\,m} \quad \Rightarrow \quad k = 9800 \frac{N}{m^3}$, por lo que la expresión es: P=9800d

Esta constante depende del líquido en cuestión, ya que en Física se estudia que $P = \rho gh$, donde ρ es la densidad del líquido, en este caso, la del agua es $\rho = 1000 \frac{Kg}{m^3}$ y g es la aceleración de la gravedad "estándar": $g = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$. Por lo tanto, $k = g\,\rho$.

La presión a una altura de 5 cm es:

$$P = \left(9800 \frac{N}{m^3}\right)(0{,}05\,m) \quad \Rightarrow \quad P = 490 \frac{N}{m^2}.$$

La presión a 5 cm de la superficie es de $490 \frac{N}{m^2}$.

La gráfica de la función $P = 9800\,d$ es la **figura 63:**

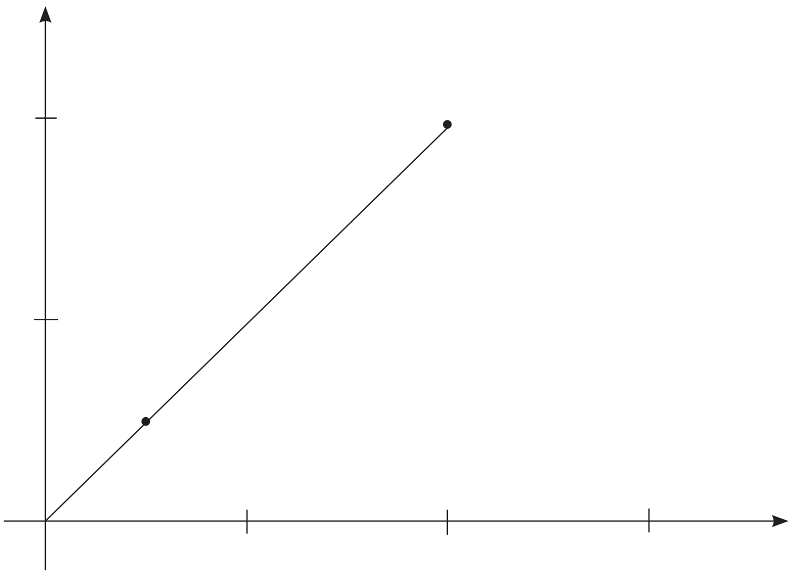


Figura 63

La escala sobre el eje de la variable independiente *d* está en múltiplos de 0,1 m, mientras que la de la variable dependiente *P* está en múltiplos de $980\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$. En la **figura 63** hay resaltados dos puntos: (0,2; 1960) y (0,05; 490). Identifíquelos en la gráfica.

Definición:

> Si n es un número real positivo, entonces el enunciado y **varía directamente con la n-ésima potencia de x,** significa que $y = kx^n$ para algún número real $k \neq 0$.
> El número k es la **constante de variación** o l**a constante de proporcionalida**d.

Ejemplo 4.1.3

En el problema planteado al inicio de esta sección, se dice que el área de un cuadrado es directamente proporcional al cuadrado de la longitud del lado. La diferencia con el ejemplo 4.1.1 está en el tipo de curva obtenida para el área, que tiene la forma de parábola **(figura 64),** lo que indica que el área varía directamente con respecto al cuadrado de la medida del lado:

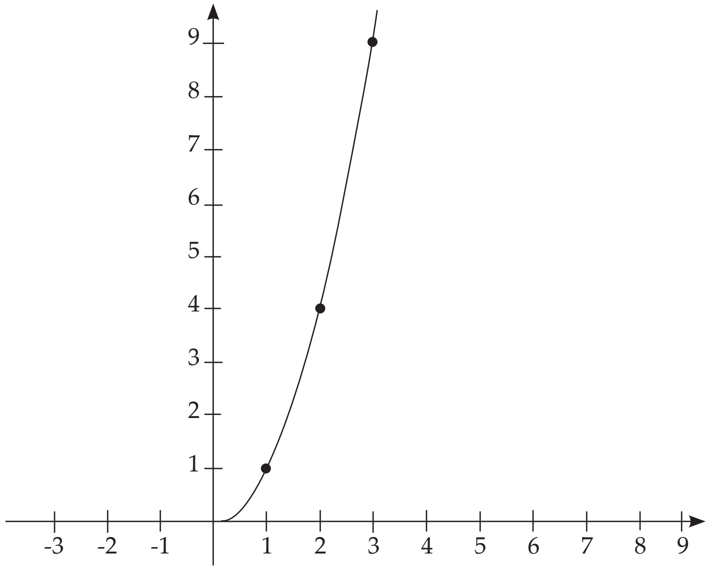


Figura 64

Si el área de un cuadrado de 2 cm de lado es 4 cm^2:

a. Deduzca la expresión para calcular el área de un cuadrado.

b. Calcule el área de un cuadrado de 8 cm de lado.

Solución:

a. De acuerdo a la curva parabólica, la función es cuadrática: $A = kl^2$, en donde l denota la medida del lado. Se reemplazan valores: 4 cm^2 = k(2 cm)$^2 \Rightarrow$ 4 cm^2 = k(4 cm^2), **despéjase** *k:*

$$k = \frac{6\ cm^2}{6\ cm^2} \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

Luego, la expresión para calcular el área es: $A = l^2$.

b. Se reemplaza l = 8 cm en $A = l^2$: A = (8 cm)$^2 \Rightarrow A$ = 64 cm^2.
El área de un cuadrado de 8 cm de lado es de 64 cm^2.

Ejemplo 4.1.4

La **figura 65** es la gráfica de la función que relaciona la variación del volumen de una esfera con respecto al radio.

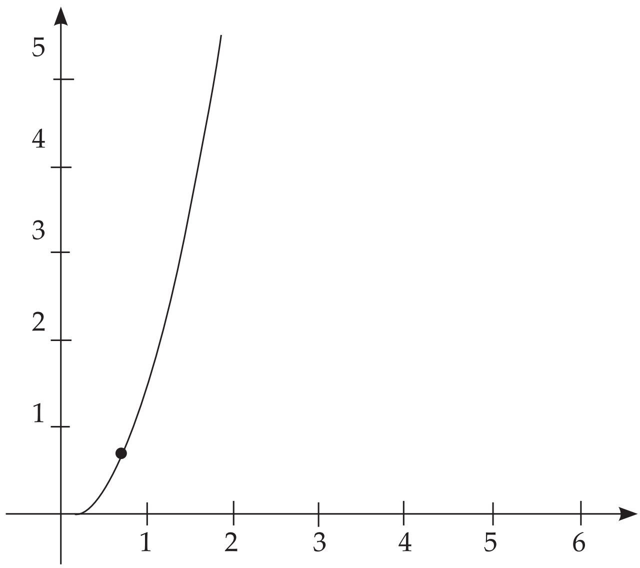


Figura 65

En la gráfica aparece señalado el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$.

a. Describa verbalmente la variación del volumen con respecto al radio y exprese el enunciado con una fórmula.

b. Calcule el valor de la constante de proporcionalidad y reemplácela en la fórmula.

c. Calcule el volumen de una esfera con un radio de 3 cm.

Solución:

a. La descripción verbal es: *el volumen de una esfera varía directamente con respecto al cubo de su radio* y su fórmula es $V = kr^3$.

¿Por qué se sabe que la variación es con respecto al cubo y no al cuadrado del radio?

b. Para calcular el valor de la constante de proporcionalidad *k*, se reemplaza en la fórmula del inciso a:

$$\frac{\pi}{6}\mathrm{cm}^3 = k\left(\frac{1}{2}\mathrm{cm}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6}\mathrm{cm}^3 = \frac{k}{8}\mathrm{cm}^3,$$ **despéjase** *k:*

$$k = \frac{8\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4}{3}\pi$$

Por lo tanto, la fórmula para calcular el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$.

c. Para calcular el volumen de una esfera de radio 3 cm, se reemplaza este valor en la fórmula obtenida en b:

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(3\,\mathrm{cm})^3 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{4}{3}\pi\,(27\,\mathrm{cm}^3) \quad \Rightarrow \quad V = 36\pi\ \mathrm{cm}^3.$$

El volumen de una esfera de 3 cm de radio es de 36 π cm^3.

Puede suceder que una variable dependa de dos o más variables.

Definición:

El enunciado z **varía conjuntamente con** x **y** y significa que $z = k\,x\,y$ para algún número real $k \neq 0$. Si $z = k\,x^n\,y^m$, donde n y m son números reales positivos, entonces z **varía conjuntamente con la** n**-ésima potencia de** x **y la** m**-ésima potencia de** y**.**
El número k es la **constante de variación** o la **constante de proporcionalidad**.

Ejemplo 4.1.5

El área de un rectángulo varía conjuntamente con la medida de su base y de su altura.

a. Escriba la fórmula para expresar la variación.

b. Si cuando la base mide 2 cm y la altura 3 cm, el área del rectángulo es 6 cm^2, calcule la constante de proporcionalidad y reemplácela en la fórmula obtenida en a.

c. Grafique la función obtenida en a. y localice en ella los puntos (3, 4, 12) y (4, 5, 20).

Solución:

a. La fórmula es: $A = k\,b\,h$, donde b es la medida de la base y h la de la altura.

b. Para calcular el valor de k, se reemplazan los valores de la base y la altura en la fórmula obtenida en a:
6 cm^2 = k(2 cm)(3 cm) $\Rightarrow$ 6 cm^2 = k(6 cm^2)**, despéjase** k:
$k = \frac{6\ cm^2}{6\ cm^2} \quad \Rightarrow \quad k = 1$, por lo tanto, la fórmula para calcular el área de un rectángulo es $A = b\,h$.

c. La gráfica de la función $A = b\,h$ no es en el plano xy; es en un sistema de tres coordenadas xyz denominado **el espacio**. En este caso hay dos variables independientes: x y y, y una variable dependiente: z.

Para la gráfica, que es la **figura 66,** el eje x representa la base, el eje y la altura y el eje z el área del rectángulo. A la gráfica de las imágenes z se le llama **superficie**, y no curva, porque es una gráfica en tres dimensiones. La superficie sólo está graficada para los valores tales que $3 \leq x \leq 6$, $3 \leq y \leq 6$.

En la gráfica, el punto (3, 4, 0) (en el plano xy) está unido por un segmento al punto (3, 4, 12). Este último punto se interpreta de la siguiente manera: cuando la base del rectángulo mide 3 cm y la altura 4 cm, el área es de 12 cm^2.

El otro punto señalado en el plano *xy* es el (4, 5, 0) y el que está encima de él es el (4, 5, 20).

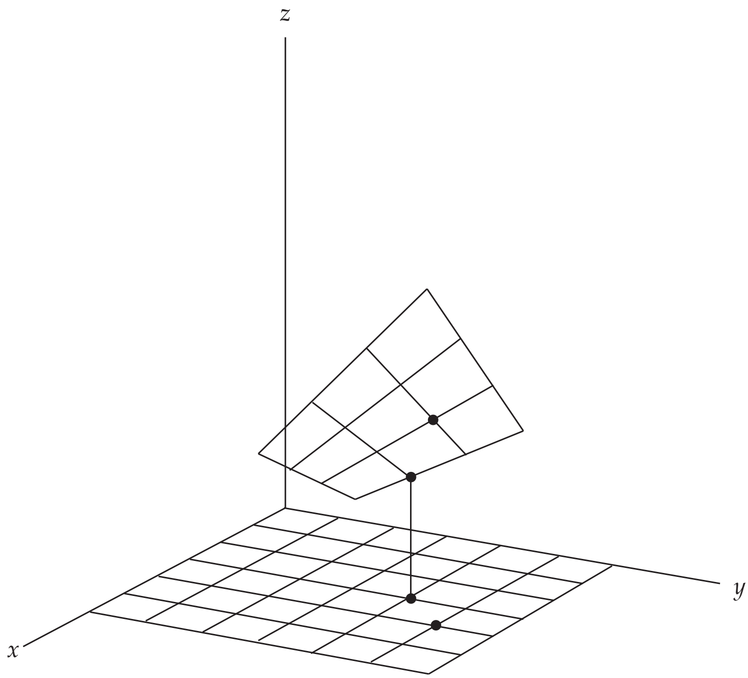


Figura 66

Definición:

El enunciado *y* **varía inversamente con** *x***,** significa que $y = \frac{k}{x}$, en donde *k* es un número real, $k \neq 0$.
El número *k* es la **constante de variación** o l**a constante de proporcionalida**d.

Ejemplo 4.1.6

En una simulación con applet (http://perso.wanadoo.es/cpalacio/boyle2.htm) de un gas encerrado en un recipiente tapado, a una temperatura constante de 25ºC, se registraron los siguientes datos de la presión (en atmósferas) y el volumen (en cm^3):

P (atm)	10	20	30	40	49
V (cm^3)	100	51	32	26	22

Grafique los datos y obtenga una fórmula que aproxime los datos obtenidos.

Solución:

La gráfica es la **figura 67:**

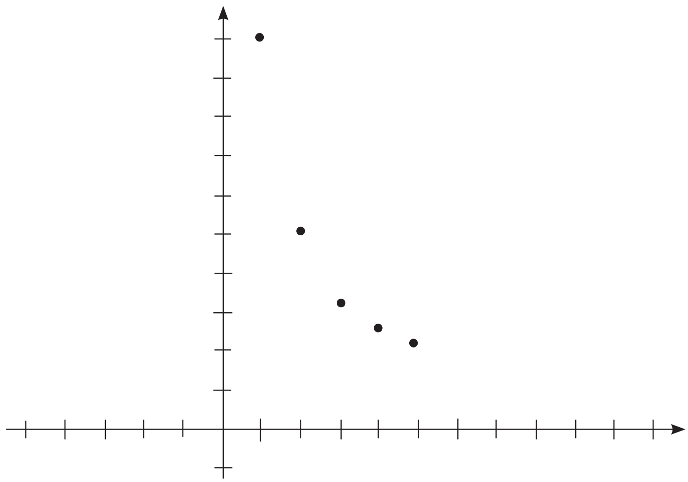


Figura 67

En la **figura 67**, el eje de la variable independiente es el de la presión *P* en múltiplos de 10 atm y el eje de la variable dependiente es el del volumen *V* en múltiplos de 10 cm^3.

Observe que la curva no es una recta, tampoco es una parábola ni una curva cúbica. La curva que se obtiene al unir los puntos es una rama de una **hipérbola equilátera.** Esto indica que el volumen es inversamente proporcional a la presión. Por lo tanto:

$V = \frac{k}{P}$, para calcular el valor de *k*, se reemplaza un punto de la tabla, el (20, 51), por ejemplo:

$51\,atm = \dfrac{k}{20\ cm^3}$, **despéjese** *k:*

k = (51 *atm*)(20 cm^3) $\Rightarrow$ k = 1020 *atm*.cm^3, luego la fórmula que modela aproximadamente los datos de la tabla es: $V = \dfrac{1020}{P}$. Si se grafica esta fórmula, se obtiene la **figura 68:**

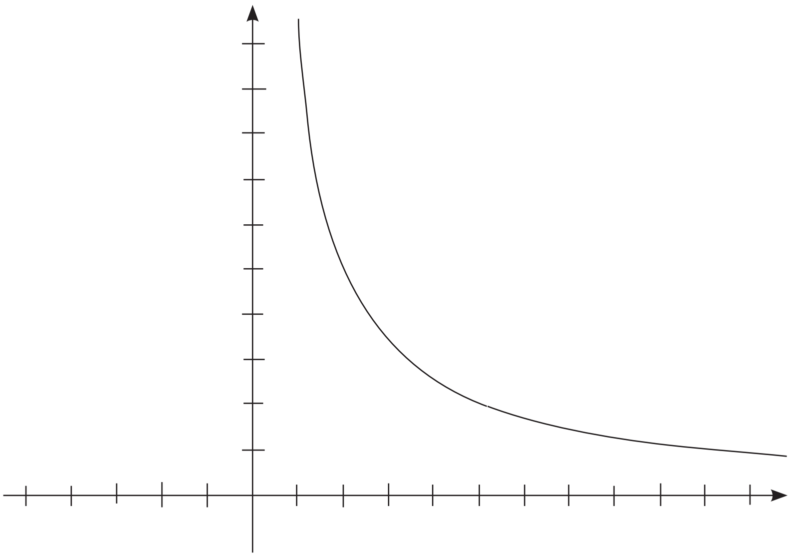


Figura 68

Definición:

El enunciado y **es inversamente proporcional a la** n **–ésima potencia de** x, significa que $y = \dfrac{k}{x^n}$ para algún número real positivo n y un número real $k \neq 0$.
El número k es la **constante de variación** o l**a constante de proporcionalida**d.

Ejemplo 4.1.7

La altura de un cono es inversamente proporcional al cuadrado del radio **(figura 69).**

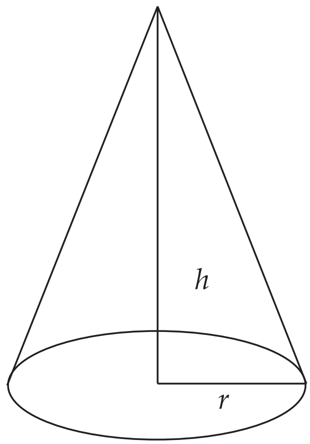


Figura 69

Un cono con un determinado volumen tiene 12 cm de altura y 4 cm de radio. Si el volumen es constante, y si el radio se reduce a la mitad, ¿cuál debe ser la medida de la altura? Grafique la fórmula obtenida.

Solución:

De acuerdo con el enunciado *la altura es inversamente proporcional al cuadrado del radio*, se plantea la expresión: $h = \frac{k}{r^2}$, se reemplazan valores:

$12\ cm = \frac{k}{(4\ cm)^2} \Rightarrow 12\ cm = \frac{k}{16\ cm^2}$, **despéjese** k:

$k = (12\text{ cm})(16\text{ cm}^2) \Rightarrow k = 192\text{ cm}^3$.

Por lo tanto, la fórmula es: $h = \frac{192}{r^2}$.

Para calcular la altura que debe tener el cono donde el radio es de 2 cm, sin que cambie el volumen, se reemplaza el valor del radio: 2 cm:

$$h = \frac{192\ cm^3}{(2\ cm)^2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{192\ cm^3}{4\ cm^2} \quad \Rightarrow \quad h = 48\ cm$$

Para que el volumen del cono permanezca constante, si el radio se reduce a 2 cm, la altura debe ser de 48 cm.

La gráfica de la fórmula $h = \frac{192}{r^2}$ es la **figura 70:**

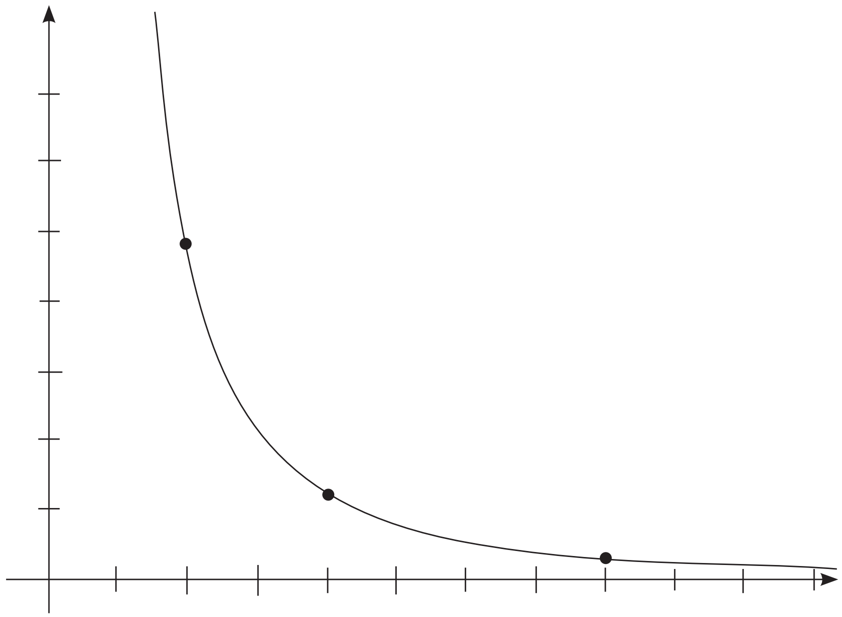


Figura 70

En dicha gráfica, el eje de la variable independiente es el radio en múltiplo de 1 cm y el eje de la variable dependiente es la altura en múltiplos de 10 cm. Están señalados los puntos (2, 48), (4, 12) y (8, 3). Identifíquelos.

Los diversos tipos de variación pueden combinarse en un problema, denominándose esto **variación combinada:**

Definición:

El enunciado z **varía directamente con** x e **inversamente** con y significa que $z = k\frac{x}{y}$, en donde k es un número real, $k \neq 0$. O también:

El enunciado z **varía directamente con** la n-**ésima potencia de** x e **inversamente** con la m-ésima potencia de y significa que $z = k\frac{x^n}{y^m}$, en donde k es un número real, $k \neq 0$ y donde n y m son números reales positivos.

El número k es la **constante de variación** o **la constante de proporcionalidad**.

En algunos casos la constante de proporcionalidad no se puede obtener porque solamente se desea saber el efecto que tiene sobre una variable el cambio de otras variables, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1.8

La resistencia eléctrica R de un alambre de sección transversal circular es directamente proporcional a la longitud L e inversamente proporcional al cuadrado del diámetro d del alambre. Calcule el porcentaje de variación en la resistencia de un alambre dado si la longitud aumenta un 40 por ciento y el diámetro un 30 por ciento.

Solución:

De acuerdo al enunciado: $R = k\frac{L}{d^2}$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Si la resistencia inicial es R, entonces la resistencia final es R_f. De modo semejante, se llaman L y d la longitud y diámetro inicial del alambre, respectivamente. Pero la longitud del alambre aumenta un 40%, luego, la longitud final del alambre es $L_f = (L + 0{,}4\,L) = 1{,}4\,L$; y el diámetro aumenta un 30%, por lo tanto, el diámetro final del alambre es $d_f = (d + 0{,}3\,d) = 1{,}3\,d$.

Para determinar el cambio porcentual, primero halle la resistencia final: $R_f = k\dfrac{1,4\ L}{(1,3\ d)^2} = k\dfrac{1,4\ L}{1,69\ d^2} \approx \dfrac{0,828\ kL}{d^2} = 0,828\dfrac{kL}{d^2}$

Luego calcule el cambio en la resistencia:

$$\Delta R = R_f - R = 0,828\frac{kL}{d^2} - \frac{kL}{d^2} = -0,172\frac{kL}{d^2}.$$

Observe que $\Delta R = -0,172R$, es decir, el cambio en la resistencia es -0,172 de la resistencia inicial del alambre, lo que quiere decir que la resistencia final del alambre disminuyó en un 17,2%, (multiplique 0,172 por 100) siendo el material del alambre el mismo.

Aplicaciones

1. Construya los rectángulos cuyas medidas se indican en la siguiente tabla:

Base (cm)	2	3	4	5
Altura (cm)	3	3	3	3

a. ¿Cuántos cuadrados de 1 cm^2 contiene cada rectángulo?
b. Grafique en diagrama cartesiano *área vs. medida de la base* los puntos obtenidos.
c. Interprete el tipo de variación que le indica la gráfica obtenida y deduzca una fórmula con el valor específico de la constante de proporcionalidad que exprese el área del rectángulo en términos de una variable.

2. Dibuje con un compás circunferencias de 1 cm, 2 cm y 3 cm de radio en la siguiente cuadrícula:

Estime cuántos cuadrados de 1 cm^2 contiene cada circunferencia y llene la siguiente tabla:

Radio (cm)	1	2	3
nº de cuadrados de 1 cm^2			

a. Grafique en un diagrama cartesiano *nº de cuadrados de 1 cm^2 vs. radio.*

b. Interprete el tipo de variación que le indica la gráfica obtenida y deduzca una fórmula, con el valor específico de la constante de proporcionalidad que exprese el área del rectángulo en términos de una variable.

3. El costo de tener funcionando un electrodoméstico durante una hora es directamente proporcional a la potencia. Si una persona vive en estrato 3 y pone a funcionar un abanico de 60 watios durante una hora, el costo de la energía eléctrica consumida es de $14,58. ¿Cuánto costará tener en funcionamiento un bombillo de 100 watios? ¿Cómo se interpreta el valor de k? Tenga en cuenta que la empresa de energía cobra en kW.h (kilovatio-hora).

4. La siguiente tabla muestra la distancia d recorrida por un cuerpo al dejarlo caer desde el reposo después de t segundos:

Tiempo (segundos)	1	2	3
Distancia (metros)	4,9	19,6	44,1

a. Grafique en un diagrama cartesiano *distancia vs. tiempo* los datos de la tabla.
b. Determine cómo es la variación y deduzca la fórmula que modela la distancia que recorre el cuerpo después de t segundos.
c. Calcule la distancia que recorre el cuerpo después de 12 segundos.

5. La **figura 71** es la gráfica del área de una superficie esférica, A, en términos del radio r. El eje de la variable independiente es el radio en múltiplos de 1 cm y el eje de la variable dependiente es el área de la superficie esférica en múltiplos de 4π.
a. Determine cómo es la variación y deduzca la fórmula que modela el área en términos del radio.
b. Calcule el área de una superficie esférica de radio 8 cm.

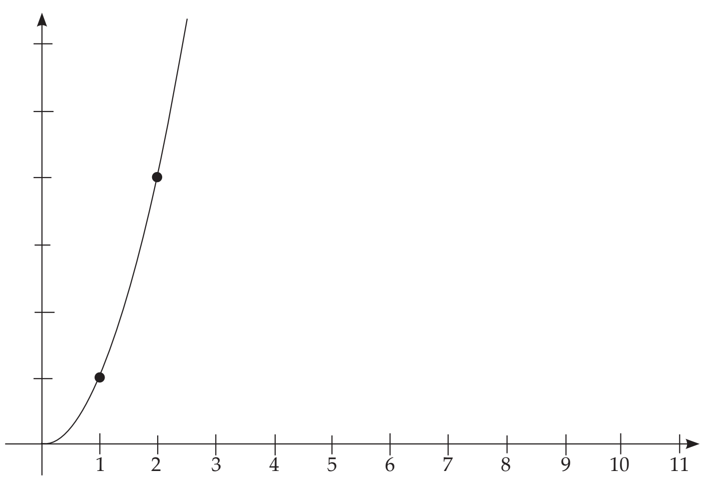


Figura 71

6. La **figura 72** muestra la gráfica del volumen de un cubo, V, en términos de la medida de su arista, a. El eje horizontal es el de la arista y el vertical, el del volumen:

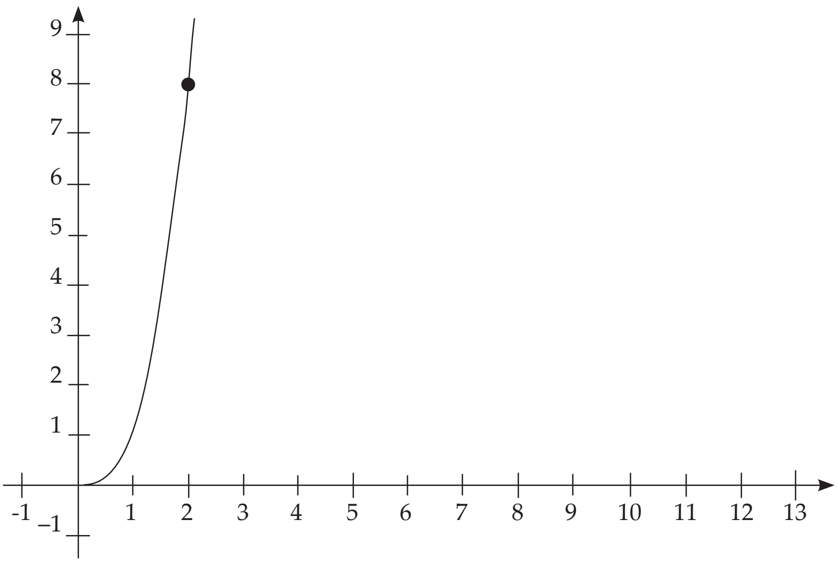


Figura 72

   a. Determine cómo es la variación y deduzca la fórmula que modela el volumen en términos de la medida de la arista.
   b. Calcule el volumen de un cubo que tiene 5 cm de arista.

7. El área de un paralelogramo varía conjuntamente con la medida de la base y de la altura. La gráfica de la fórmula de variación es la **figura 73,** en cuya superficie se grafican los valores $2 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$, donde x denota la medida de la base y y la de la altura.

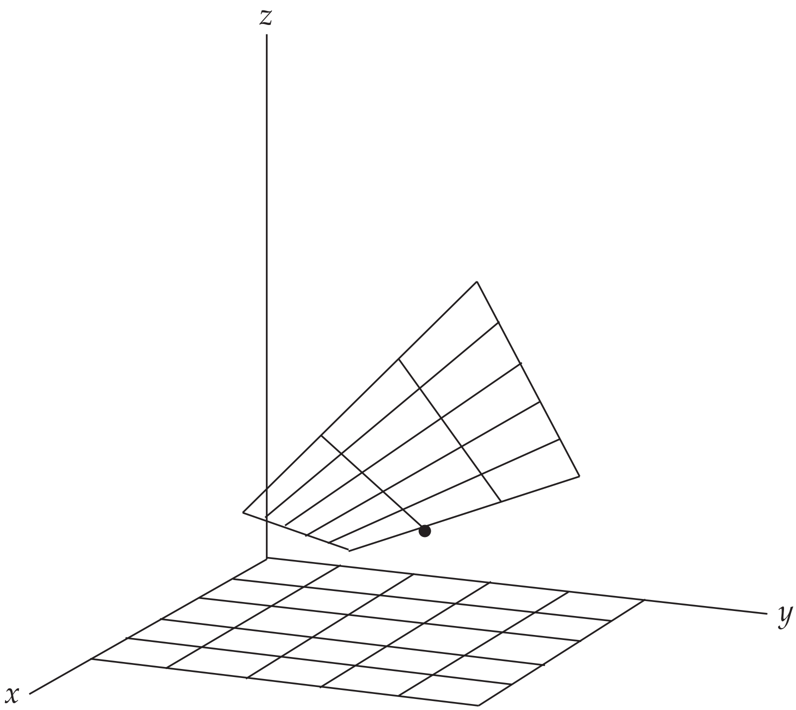


Figura 73

a. Deduzca la fórmula de variación especificando el valor de esta constante.
b. ¿Cuál es el área de un paralelogramo de 4 cm de base y 5 cm de altura?
c. Identifique en la superficie de la **figura 73** los puntos (5, 4, 20) y (4, 2, 8).

8. El área de un triángulo varía conjuntamente con la medida de la base y de la altura. La gráfica de la fórmula de variación es la **figura 74,** en cuya superficie se grafican los valores $2 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$, donde x denota la medida de la base y y la de la altura.

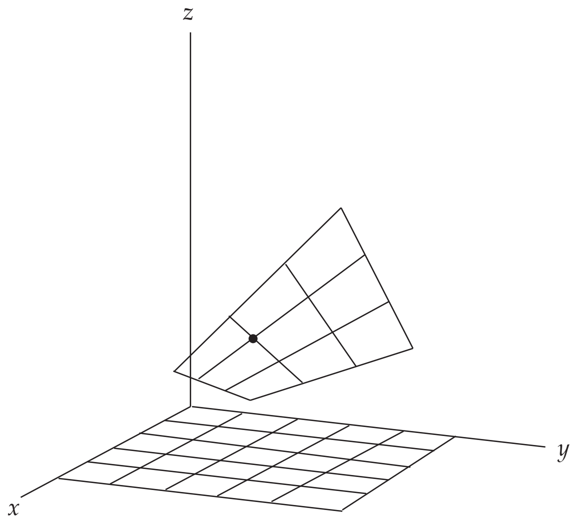


Figura 74

a. Deduzca la fórmula de variación especificando el valor de esta constante. Utilice el punto (4, 3, 6).

b. ¿Cuál es el área de un triángulo de 2 cm de base y 3 cm de altura?

c. Identifique en la superficie de la **figura 74** los puntos (3, 2, 3) y (3, 5, 15/2).

9. El área lateral de un cilindro varía conjuntamente con el del radio de la base y de la medida de la altura. La siguiente tabla muestra algunos valores del área lateral, del radio y de la altura:

Radio (cm)	2	3	4
Altura (cm)	10	12	15
Área lateral (cm^2)	$40\ \pi$	$72\ \pi$	

a. Deduzca la fórmula de variación especificando el valor de esta constante.

b. ¿Cuál es el área lateral de un cilindro de 4 cm de radio y 15 cm de altura? Colóquelo en la tabla.

c. ¿Cuáles serían las dimensiones de un rectángulo para que el área lateral del cilindro sea de $40\ \pi\ cm^2$? ¿y de $72\ \pi\ cm^2$?

10. El volumen de una caja con base cuadrada es directamente proporcional a la medida de la altura de la caja y al cuadrado de la medida de la arista de la base. La gráfica de la fórmula de variación es la **figura 75,** en cuya superficie se grafican los valores $4 \leq x \leq 7$, $4 \leq y \leq 7$, donde x denota la medida de arista de la base y y la medida de la altura de la caja.

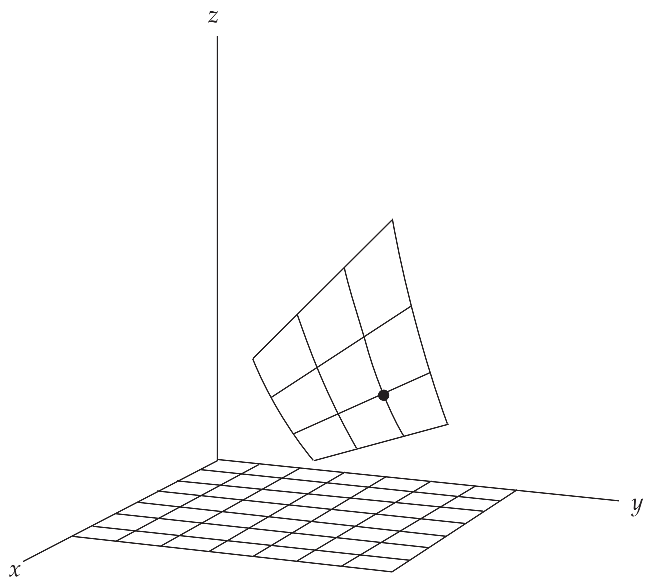


Figura 75

a. Deduzca la fórmula de variación especificando el valor de esta constante. Utilice el punto (5, 6, 150).
b. ¿Cuál es el volumen de una caja cuya arista de la base mide 4 cm y la altura 6 cm? Identifique el resultado en la **figura 75.**
c. Identifique en la superficie de la **figura 75** los puntos (3, 2, 3) y (3, 5, 15/2).

11. La resistencia R de un alambre de cobre de longitud dada y sección transversal circular, es inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro. Si 1 kilómetro de alambre de cobre de temple duro calibre n.º 10 tiene una resistencia de 3,41 ohms y un diámetro de 2,588 mm, calcule la resistencia de 1 kilómetro de alambre del mismo temple calibre n.º 12, cuyo diámetro es de 2,052 mm.

12. El peso de un objeto situado arriba de la superficie de la Tierra es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro del planeta. La Tierra es ligeramente achatada en los Polos. Si usted viaja al Polo Norte, ¿pesaría más en el Polo Norte o en Barranquilla? Justifique su respuesta.

13. Un radián es una unidad de medida de ángulos. $1\ \textit{radi‡n} = \frac{180}{\pi} \approx 57{,}29^{o}$. En un sector circular, manteniendo constante la longitud del arco, la medida del ángulo (en radianes) es inversamente proporcional al radio. La **figura 76** es la gráfica de la variación.

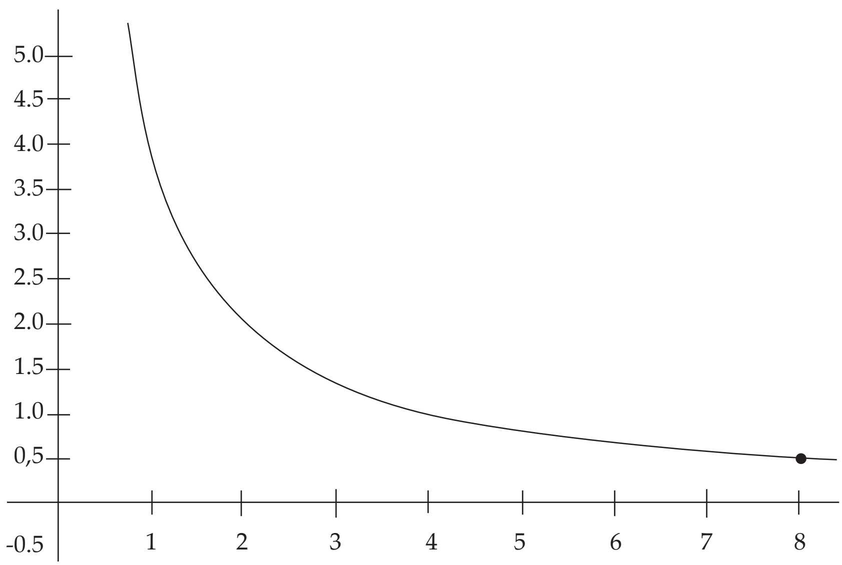


Figura 76

En la **figura 76,** el eje horizontal es el radio y el eje vertical es la medida del ángulo en radianes. Deduzca la fórmula de variación especificando el valor de la constante de proporcionalidad.

Un ángulo tiene una medida de 1 **radián** siempre que al colocar su vértice en el centro de una circunferencia, la longitud del arco interceptado en la circunferencia es igual al radio. Teniendo en cuenta esta definición de radián, ¿qué relación tiene la constante de variación con la longitud del arco interceptado?

14. La intensidad luminosa es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente de luz. ¿Cuánto debe alejarse de la fuente luminosa un objeto, situado a 2 metros de esta, para recibir un cuarto de la cantidad de luz que ahora tiene?

15. Según la ley de Poiseuille, la presión P en una arteria es directamente proporcional a la longitud del vaso e inversamente proporcional a la cuarta potencia de su radio. ¿Qué ocurre con la presión sanguínea en una arteria particular si debido a una acumulación de colesterol en la vena el radio disminuye de 3 mm a 2 mm?

16. El volumen de una esfera es directamente proporcional al cubo de su radio. Si el radio se triplica, ¿qué le sucede al volumen de una esfera?

17. El volumen V de un cilindro recto varía conjuntamente con su altura h y con el cuadrado del radio de su base r. Si la altura se reduce a la mitad y el radio de su base se duplica, ¿cuál es el cambio porcentual en el volumen?

18. La Ley de Ohm establece que la corriente (I) que fluye por un conductor es directamente proporcional al voltaje (V) e inversamente proporcional a la resistencia (R). Si la resistencia disminuye un 10 por ciento, calcule el cambio porcentual en el voltaje para aumentar la corriente en un 20 por ciento.

19. El área lateral de un cilindro recto es directamente proporcional al radio de su base y a su altura. Si el radio aumenta un veinte por ciento, calcule el porcentaje de cambio en la altura para que el área lateral no varíe.

20. El volumen de agua que pasa por un tubo cuando está completamente lleno, es directamente proporcional al cuadrado del diámetro del tubo. Si se duplica el diámetro, ¿cómo se afecta el volumen?

21. ¿Por qué al cargar una bolsa con víveres con un dedo se siente más presión que si se carga con dos o más dedos?

22. Un recipiente cilíndrico quedó lleno al verter en él 250 cm^3 de cemento, pero al vaciarlo y echar en el recipiente 250 cm^3 de harina, este no cupo. Explique por qué.

23. ¿Por qué hay mareas altas en las fases de luna llena y luna nueva? ¿Qué variación influye en ello?

24. La segunda ley de Kepler del movimiento planetario afirma que la línea que va del Sol a cualquier planeta (radio-vector) barre áreas iguales en intervalos iguales de tiempo. Según esta ley, ¿qué sucede con la velocidad de rotación de la Tierra cuando esta está en el afelio? ¿Y cuándo está en el perihelio? Explique sus respuestas.

25. ¿Qué relación existe entre la temperatura y la presión del aire que hay dentro de una olla a presión cuando esta se pone al fogón?

4.2 VARIACIÓN EXPONENCIAL

? Problema

La bacteria Escherichia Coli se duplica en cantidad cada 20 minutos. En un portaobjetos hay tres bacterias a las 2:00 p. m.

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas bacterias habrán a las 3:05 p. m. del mismo día? Haga un diagrama que muestre la reproducción.
   R/

2. ¿Puede deducir una fórmula para predecir cuántas bacterias habrán a las 10:00 p. m. del mismo día?
   R/ ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

No avance hasta que haya respondido las preguntas anteriores.

Teoría

Hay fenómenos o situaciones que no siguen un patrón lineal, cuadrático o cúbico, sino exponencial. Ejemplos de estas situaciones son el crecimiento demográfico, la reproducción de virus o bacterias, el valor de una inversión cuando se reinvierten los intereses, entre otros.

Definición:

> Una **función exponencial** es una función que tiene por representación algebraica $y = Ab^x$, en donde A es un número real y b es un número real positivo distinto de 1 que se denomina **base.**

Ejemplo 4.2.1

Una persona quiere hacerse millonaria y comienza a ahorrar de la siguiente manera: ahorra \$3 el primer día, \$6 el segundo día, \$12 el tercer día y así sucesivamente.

a. Deduzca una fórmula para calcular la cantidad de dinero que debe ahorrar la persona en el n-ésimo día.
b. ¿Qué cantidad de dinero deberá ahorrar el décimo quinto día?

Solución:

Para observar el patrón de la situación, se hace la siguiente tabla de valores donde n denota el número de días (variable independiente) y y la cantidad de dinero que se ahorra (variable dependiente):

n (día)	y (cantidad de dinero, en pesos)	Notación exponencial
1	3	$3(2)^0$
2	6 = 3 (2)	$3(2)^1$
3	12 = 2 (6) = 2 (3) (2)	$3(2)^2$
4	24 = 2 (12) = 2 (2) (3) (2)	$3(2)^3$
…	**…**	…
n		$3(2)^{n-1}$

a. De la tabla se deduce que $A = 3$ y $b = 3$, por lo tanto, en el n-ésimo día la persona deberá ahorrar $y = 3(2)^{n-1}$ pesos. **Por la propiedad** $a^{xy} = a^x \cdot a^y$: $y = 3(2)^{n-1} = 3(2)^n\,(2)^{-1}$, **por la definición de exponente negativo:**
$y = 3(2)^n\left(\frac{1}{2}\right)$ **de donde** $y = \frac{3}{2}(2)^n$.

b. Para saber la cantidad de dinero que deberá ahorrar en el décimo quinto día, reemplazamos $n = 15$ en la fórmula $y = \frac{3}{2}(2)^n$:

$$f(15) = \frac{3}{2}(2)^{15} = \frac{3}{2}(32768) = 49152.$$

En el décimo quinto día deberá ahorrar $49 152.

La gráfica de una parte de la función es la siguiente **figura 77:**

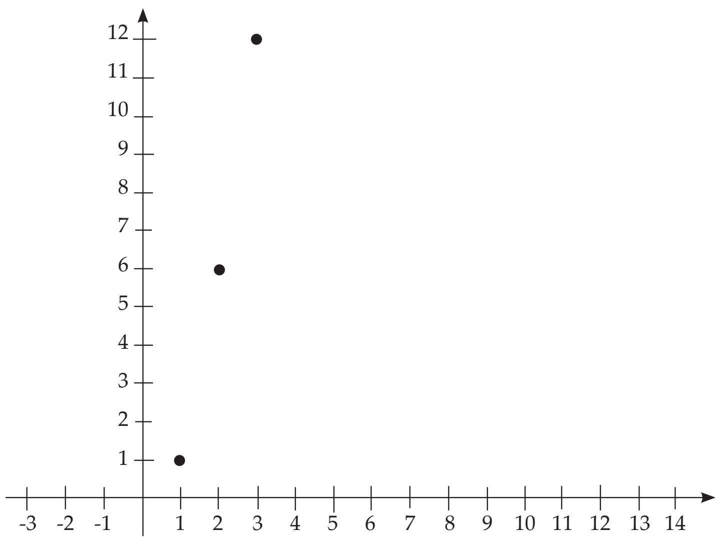


Figura 77

No se unen los puntos porque el dominio de la función es discreto, ya que los días se cuentan con números enteros no negativos. En la gráfica observe que la función es creciente porque la base ($b = 2$) es mayor que 1.

En el ejemplo 4.2.1 la base es mayor que 1, por consiguiente es una situación de **crecimiento exponencial.** Puede ocurrir que la base sea menor que 1 como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2.2

Se tiene un cuadrado que tiene de lado 4 cm de longitud. Se selecciona la mitad del cuadrado, luego la mitad de la mitad, después la mitad de la mitad de la mitad y así sucesivamente.

a. Deduzca una fórmula para predecir el área del cuadrado en la n-ésima etapa.
b. ¿Cuál es el área del cuadrado que se selecciona en la décima etapa?

Solución:

Un diagrama de la situación es la **figura 78:**

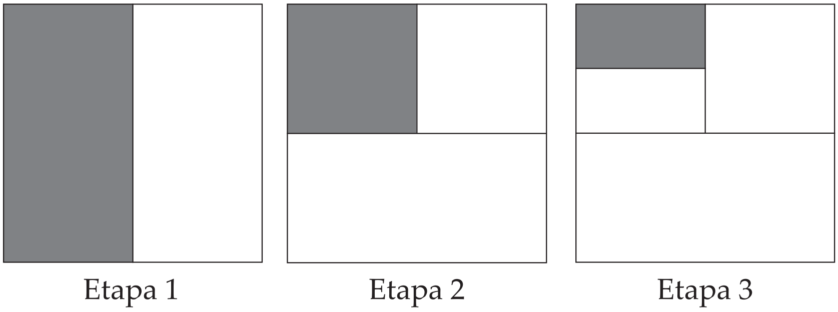


Figura 78

A partir del diagrama se hace la siguiente tabla de valores, donde n denota el número de etapas de la situación (variable independiente) y a el área del cuadrado que se selecciona, respectivamente (variable dependiente):

n (etapa)	a (área del cuadrado)	Notación exponencial
1	8	$8\left(\frac{1}{2}\right)^0$
2	$4 = 8\left(\frac{1}{2}\right)$	$8\left(\frac{1}{2}\right)^1$
3	$2 = 8\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$	$8\left(\frac{1}{2}\right)^2$
...	...	...
n		$8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

a. De la tabla se deduce que $A = 8$ y $b = \frac{1}{2}$; por lo tanto, en la n-ésima etapa se seleccionará un cuadrado de área $a(n) = 8(\frac{1}{2})^{n-1}$, y por propiedades de los exponentes, la expresión queda $a(n) = 16(\frac{1}{2})^n$ cm^2.

b. El área del cuadrado seleccionado en la décima etapa es:

$$a(10) = 16(\frac{1}{2})^{10} = 16\left(\frac{1}{1024}\right) = \frac{1}{64} = 0{,}015625 \text{ cm}^2 \cdot$$

Una parte de la gráfica de $a(n) = 16(\frac{1}{2})^n$ es la **figura 79.**

Como en el ejemplo 4.2.1, el dominio es discreto porque no se puede decir *"media etapa"*, por ejemplo. Por eso, no se unen los puntos. La función es decreciente porque la base es menor que 1.

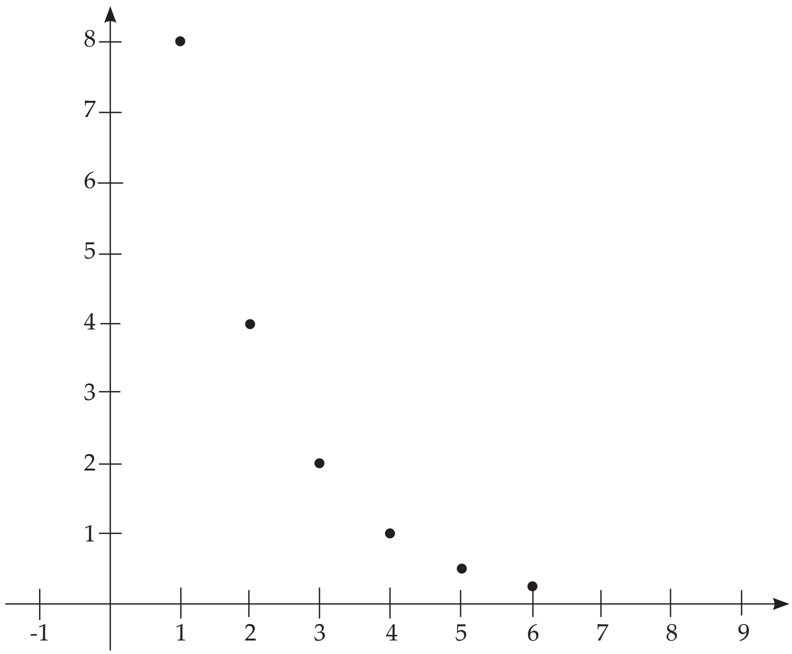


Figura 79

En los dos ejemplos anteriores, el dominio toma valores sucesivos 1, 2, 3, etc., o sea, números enteros no negativos **(modelos en tiempo discreto).** Cuando en una función exponencial el dominio son números enteros no negativos, esta se denomina **sucesión geométrica.** En una sucesión geométrica, al número *b* se le llama la **razón** de la sucesión, que es constante y se calcula con la fórmula $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. En una sucesión geométrica, el *n*-**ésimo término** se obtiene con la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$, la misma que se alcanzó en las tablas de dichos ejemplos.

Puede suceder que en una situación, por ser el **tiempo continuo**, no se logre determinar el primer término de la función exponencial, tal como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2.3

Poco tiempo después de tomar una aspirina, un paciente ha absorbido 300 mg del medicamento. Si la cantidad de aspirina que tendrá en la sangre decrece en forma exponencial, y a las 2 horas desaparece la mitad, calcule la cantidad de aspirina que tendrá en la sangre después de 5 horas. Grafique la función obtenida.

Solución:

En este problema se desconoce la cantidad del medicamento que tenía la aspirina, pero se sabe que esta situación se modela con una función exponencial. Para observar el patrón descrito, se hace la siguiente tabla de valores donde t denota el número de horas (variable independiente) y y la cantidad de medicamento presente en la sangre (variable dependiente), teniendo en cuenta que el medicamento presente en la sangre se reduce a la mitad cada dos horas:

Tiempo t (horas)	2	4	6
Cantidad de medicamento y en la sangre (mg)	150	75	37,5

La fórmula de la función exponencial es $y = Ab^x$, entonces el objetivo es calcular el valor de A y de la base b. Como sucede para deducir una función lineal, es suficiente conocer las coordenadas de dos puntos. Seleccione primero un punto (t, y) de la tabla, por ejemplo, el (4,75) y reemplácelo en la fórmula $y = Ab^x$:

$$75 = Ab^4 \qquad \textbf{(1)}$$

Ahora reemplace el punto (2, 150):

$$150 = Ab^2 \qquad \textbf{(2)}$$

se divide **(1)** entre **(2)**:

$\dfrac{75}{150} = \dfrac{Ab^4}{Ab^2}$, **por la propiedad cancelativa y de los exponentes**

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}: \frac{1}{2} = b^2 \quad \text{luego} \quad b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$$

Para calcular el valor de *A*, escoja cualquier punto, por ejemplo, el (2, 150), y lo reemplaza en la fórmula $y = Ab^x$ junto con el valor de *b*:

$150 = A\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$, **por propiedad de los exponentes** $(a^x)^y = a^{xy}$:

$150 = A\left(\frac{1}{2}\right)$, **se despeja** *A*:

$A = 300$. **Se reemplaza el valor de A y b en la fórmula** $y = Ab^x$:
$y = 300\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^t \Rightarrow y = 300\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\right)^t \Rightarrow y = 300\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ es la fórmula que expresa la cantidad de medicamento presente en la sangre después de *t* horas.

Después de 5 horas, habrá en la sangre $y(5) = 300\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = 53{,}03$ miligramos de medicamento en la sangre. Obsérvese que 53,03 está entre 150 y 37,5.

La gráfica de $y = 300\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ es la **figura 80:**

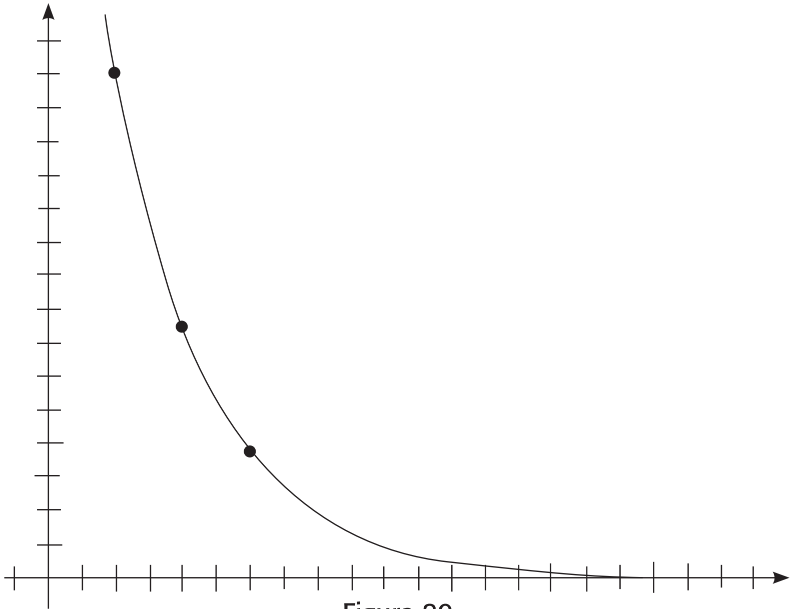


Figura 80

La escala sobre el eje horizontal *t* está en múltiplos de 1 hora, mientras que el eje vertical *y* está en múltiplos de 10 mg. Aparecen señalados los puntos (2, 150), (4, 75) y (6, 75/2).

A diferencia de los dominios de las funciones obtenidas en los ejemplos 4.2.1 y 4.2.2, el dominio de esta función es continuo y consiste en los números reales no negativos, ya que *t* puede tomar valores como 1,5 por ejemplo.

En decrecimiento exponencial, como el ejemplo anterior, algunos libros escriben la base con un número entero con exponente negativo porque aplican la definición del exponente negativo. Por ejemplo:

$y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3[(2^{-1})]^x$ por la definición del exponente negativo: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$y = 3[(2)^{-1}]^x = 3(2)^{-x}$ por la propiedad de los exponentes: $(a^m)^n = a^{mn}$

Por lo tanto: $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3(2)^{-x}$

Aplicaciones

1. Una persona abre una cuenta de ahorros con $200 000 y el banco le paga un interés mensual del 2%. Si la cuenta no se "mueve" (ni se deposita ni se saca dinero) y los intereses se reinvierten, deduzca una fórmula para predecir la cantidad de dinero que tendrá ahorrado al cabo de *t* meses. ¿Qué cantidad de dinero tendrá ahorrado al cabo de un año? Clasifique el dominio de la función.

2. A un triángulo equilátero, cuyo lado mide 4 cm, se le han unido los puntos medios de cada uno de los lados para formar otro triángulo equilátero como lo muestra la **figura 81.** A cada uno de los tres triángulos grises se le hace el mismo procedimiento y así sucesivamente.

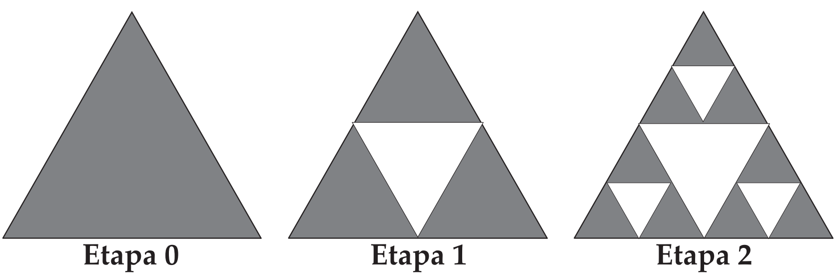


Figura 81

a. Deduzca una fórmula para calcular cuántos triángulos grises se obtienen en la n-ésima etapa del proceso. Clasifique el dominio de la función.

b. ¿Cuántos triángulos grises habrá en la décima quinta etapa?

3. Siga las siguientes instrucciones. Para cada paso debe dibujar el segmento de 9 cm:

1. Dibuje un segmento de 9 cm de longitud.

2. Divida el segmento en tres partes iguales y borre el segmento de la mitad. Esta es la etapa 1 del proceso.

3. Divida cada uno de los dos segmentos en tres partes iguales y borre el segmento intermedio respectivo. Esta es la etapa 2 del proceso.

4) Divida cada uno de los segmentos resultantes en tres partes iguales y borre el intermedio respectivo. Esta es la etapa 3.

a. Deduzca una fórmula para predecir el número de segmentos que hay en la *n*-ésima etapa. Clasifique el dominio de la función.

b. ¿Cuántos segmentos hay en la vigésima tercera etapa?

c. Deduzca una fórmula para calcular la longitud de un segmento en la *n*-ésima etapa.

d. ¿Cuál es la longitud de un segmento en la décima cuarta etapa?

4. La *esporulación* es un tipo de reproducción asexual en el cual el núcleo de la célula se fragmenta en numerosas partes que se rodean de una porción de citoplasma, constituyéndose así numerosas células hijas, las cuales quedan libres cuando se rompe la membrana de la célula madre. A estas células hijas se les conoce como *esporas*. El hongo del pan *Neurospora Crassa* se reproduce de esta forma. Suponga que una bacteria tarda en cuadruplicarse seis horas. Si un biólogo tiene tres de estas bacterias, ¿cuántas tendrá a los cuatro días?

5. Los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD, cuyo lado mide 8 cm, se unen para formar un nuevo cuadrado. Este procedimiento se repite para cada nuevo cuadrado.

a. Deduzca una fórmula para calcular el área del *n*-ésimo cuadrado, contado desde el primer cuadrado ABCD. Clasifique el dominio de la función.

b. ¿Cuál es el área del duodécimo cuadrado?

6. Se corta un disco circular, en papel, de 4 cm de radio. De otro papel se sacan dos discos de la mitad del radio del anterior y se colocan sobre el primer disco, como lo muestra la figura. A continuación se colocan discos de un cuarto de radio del primer círculo sobre los dos últimos, tal como lo muestra la **figura 82**. Si el proceso sigue:

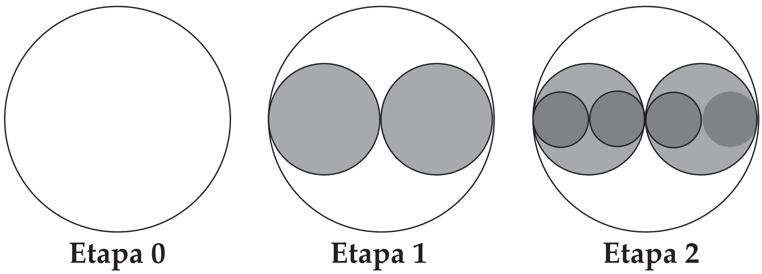


Figura 82

a. Deduzca una fórmula para calcular el área de un círculo en la n-ésima etapa.
b. Calcule el área de un círculo en la décima octava etapa.

7. Un cuadrado de lado 3 cm se divide en nueve pequeños cuadrados donde el central se pinta de gris. Cada uno de los cuadrados blancos pequeños se divide a su vez en otros nueve y cada cuadrado intermedio se pinta de gris, tal como lo muestra la **figura 83.** Suponga que el proceso se repite sucesivamente.

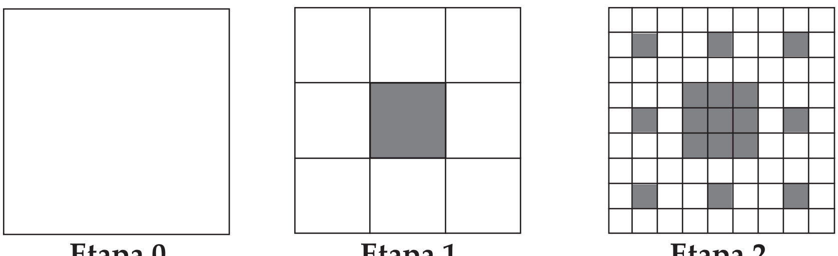


Figura 83

a. Deduzca una fórmula para calcular cuántos cuadrados grises habrán en la n-ésima etapa.
b. ¿Cuántos cuadrados grises habrán en la décima cuarta etapa?
c. Deduzca una fórmula para predecir el área de un cuadrado gris en la n-ésima etapa.
d. ¿Cuál es el área de un cuadrado gris en la décima séptima etapa?

8. El carbono 14 es un isótopo inestable del carbono que se desintegra en forma continua transformándose en nitrógeno. La cantidad de carbono 14 que queda en una muestra que contenía al principio A gramos de carbono 14 está dada por $C(t) = A(0{,}999879)^t$, donde t es el tiempo en años. Una planta que se acaba de descubrir contiene 0,50 gramos de carbono 14, y se sabe que tiene 5000 años de antigüedad. ¿Cuánto carbono 14 tenía esa planta originalmente?
R/aproximadamente 212 gramos.

9. Un fósil contenía originalmente 104 gramos de carbono 14. Con base en la fórmula $C(t)$ del problema anterior, estime la cantidad de carbono 14 que queda en la muestra pasados 5000, 10 000 y 15 000 años.

10. Un cultivo se inicia con 10 bacterias. Dos horas después hay 20 bacterias.
a. Deduzca una fórmula para calcular el tamaño del cultivo en función del tiempo t, en horas. Clasifique el dominio de la función.
b. Calcule la cantidad de bacterias, después de 3 días.

11. La ***vida media*** de una cantidad que decae exponencialmente es el tiempo necesario para que la cantidad se reduzca a la mitad. Los isótopos radioactivos que tienen una vida media relativamente breve se utilizan con frecuencia en los procedimientos de obtención de imágenes médicas. Suponga que un isótopo tiene una vida media de 4 horas y se inyectan 10 mg en el cuerpo.

a. Deduzca una fórmula para calcular la cantidad de isótopo radioactivo en el organismo t horas después de haberse inyectado.

b. ¿Qué cantidad permanecerá radiactiva después de 2 horas? ¿Después de 24 horas?
R/ 7,07 mg y 0,16 mg.

12. Para la ampicilina antibiótica, aproximadamente el 40% del medicamento se elimina cada hora. Si se administra una dosis de 5 dg, estime la vida media del medicamento a partir de la gráfica **(figura 84)** de la función que expresa la cantidad de amplicilina después del tiempo t en horas:

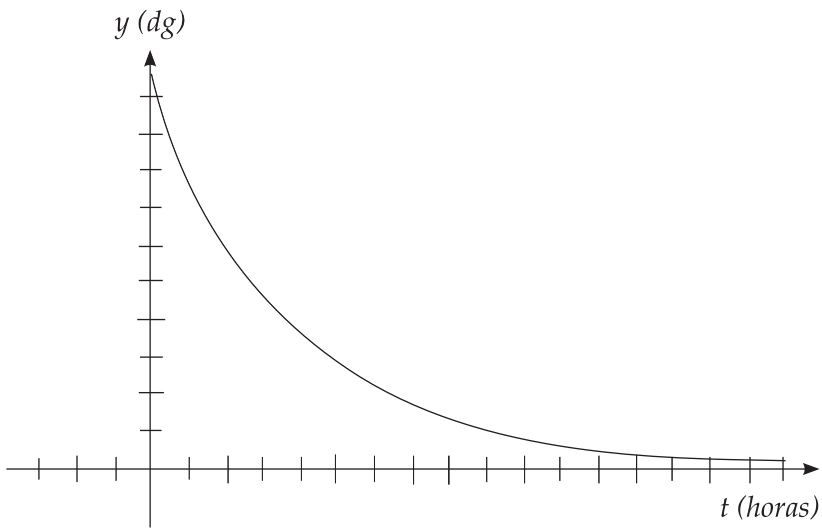


Figura 84

13. Después de haber ingerido algunos tragos una persona tiene una concentración de alcohol en la sangre de 0,20 mg/dl. Si la cantidad de alcohol decae en forma exponencial, y se elimina la cuarta parte cada hora, calcule la concentración de alcohol en la sangre de esa persona después de 4 horas.

14. En el problema anterior, calcule el tiempo que se necesita para que la concentración de alcohol en la sangre baje a 0,04 mg/dl.

15. En el ejemplo 4.2.3, calcule el tiempo que tarda en disminuir la aspirina en la sangre hasta 30 mg.

16. Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y cada hora después en el organismo queda el 80% de medicamento.

a. Deduzca una función que permita calcular la cantidad de medicamento presente en el organismo *t* horas después.

b. ¿Qué cantidad de medicamento hay en el organismo 12 horas después?

Cuando un fenómeno se comporta de manera exponencial, con base menor que uno, y la variable independiente toma valores muy grandes, la suma de las imágenes se aproxima a un valor determinado. Matemáticamente: si en una función exponencial $y = Ab^x$, con $0 < b < 1$, y si la variable toma valores muy grandes, entonces la suma "infinita" $A + Ab + Ab^2 + Ab^3 + \cdots + Ab^n + \cdots$ se aproxima al número $S = \frac{A}{1-b}$.

Intuitivamente el enunciado anterior implica que si se suman más y más imágenes de una función exponencial con las características indicadas, las sumas se acercan más y más al número $\frac{A}{1-b}$. Los problemas 17-20

17. Si en el problema 5, ítem b, el proceso continúa indefinidamente, calcule la suma de las áreas de todos los cuadrados.

18. Si el proceso continúa indefinidamente en el problema 6, ítem b, calcule el área de todos los círculos.

19. Si en el problema 7 el proceso sigue indefinidamente, calcule el área total pintada de gris.

20. La *semivida o vida media* en el torrente sanguíneo de cierto fármaco es de alrededor de 2 horas. Cada 4 horas se administrarán dosis de D mg, en donde D debe calcularse.

a. Muestre que el número de miligramos del medicamento en el torrente sanguíneo, después que se ha administrado la n-ésima dosis es $D+\frac{1}{4}D+\ldots+(\frac{1}{4})^{n-1}D$ y que esta suma es aproximadamente $\frac{4}{3}D$ para valores grandes de n.

b. Si se considera peligroso que haya más de 500 mg del fármaco en el torrente sanguíneo, calcule la mayor dosis que se puede administrar repetidamente en un período largo. R/ 375 mg

Ejercicios 4.2

En los ejercicios 1-3 determine cuál función representa los datos de un modelo exponencial y cuál, el lineal. Obtenga la fórmula de cada modelo.

1.

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**
$f(x)$	0,25	0,5	1	2
$g(x)$	-4	-2	0	2

2.

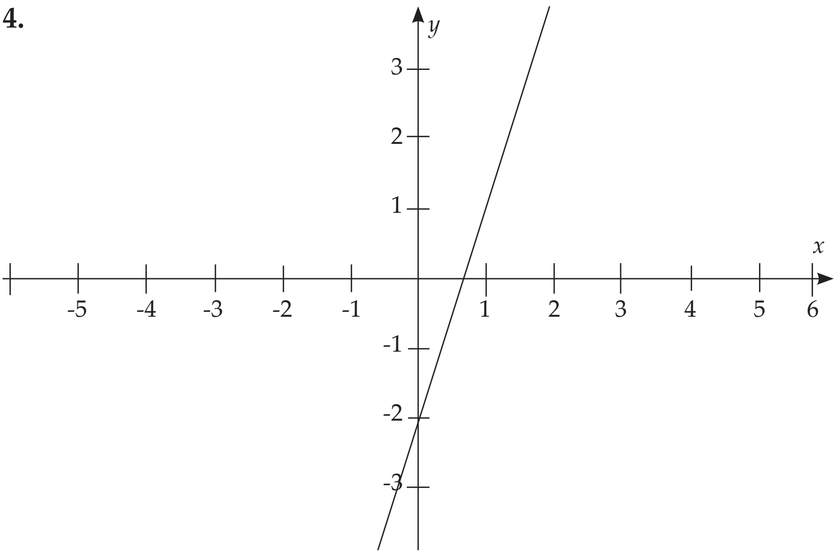
x	**-1**	**0**	**1**	**2**
$f(x)$	-5	-2	1	4
$g(x)$	1 / 6	0,5	1,5	4,5

3.

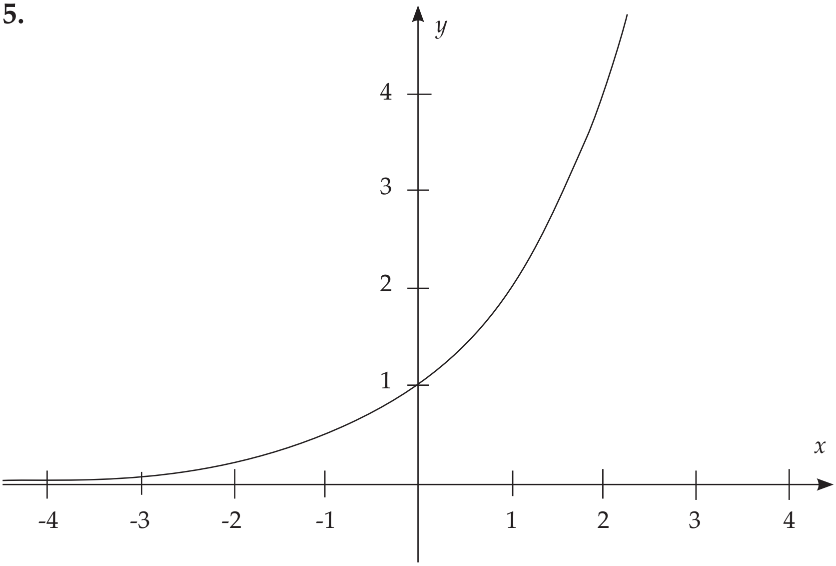
x	**2**	**3**	**4**	**5**
$f(x)$	1	2	4	8
$g(x)$	3	7	11	15

Relacione las gráficas 4 – 9 con los modelos obtenidos de las tablas de los ejercicios 1 – 3.

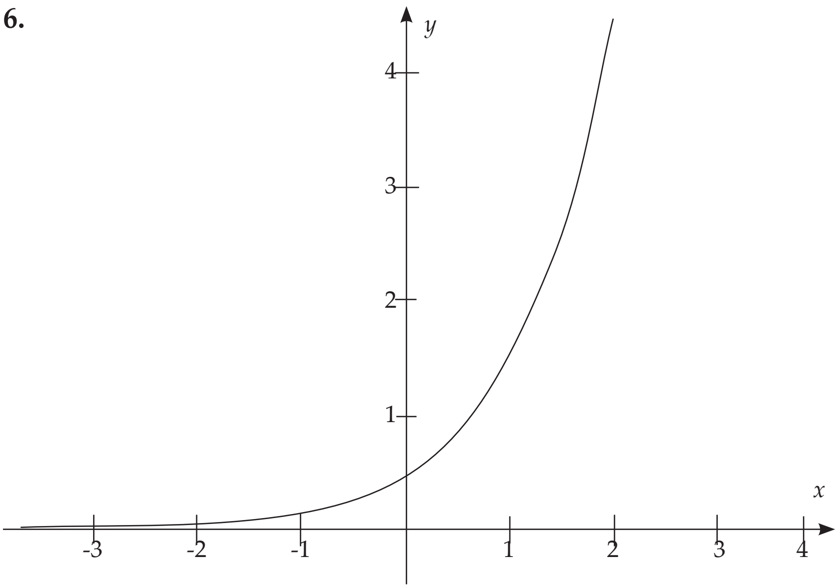
4.



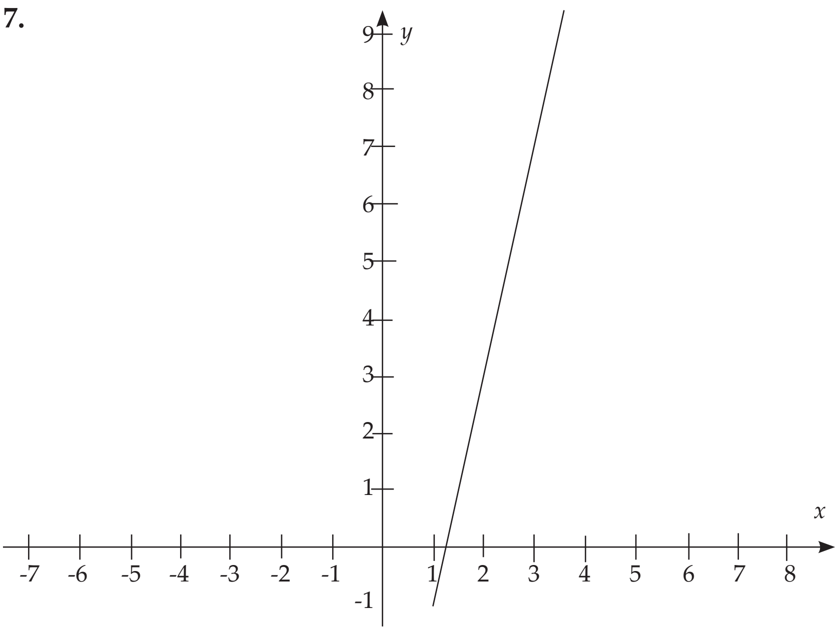
5.



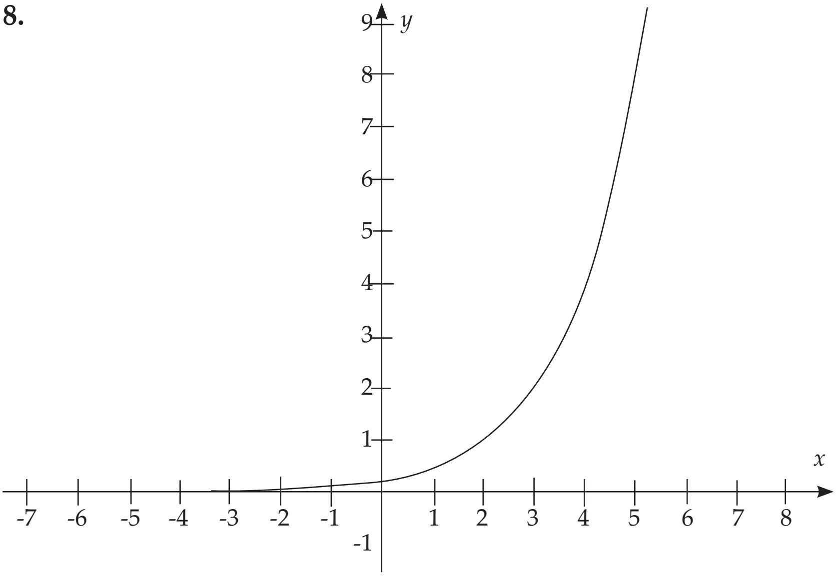
6.



7.

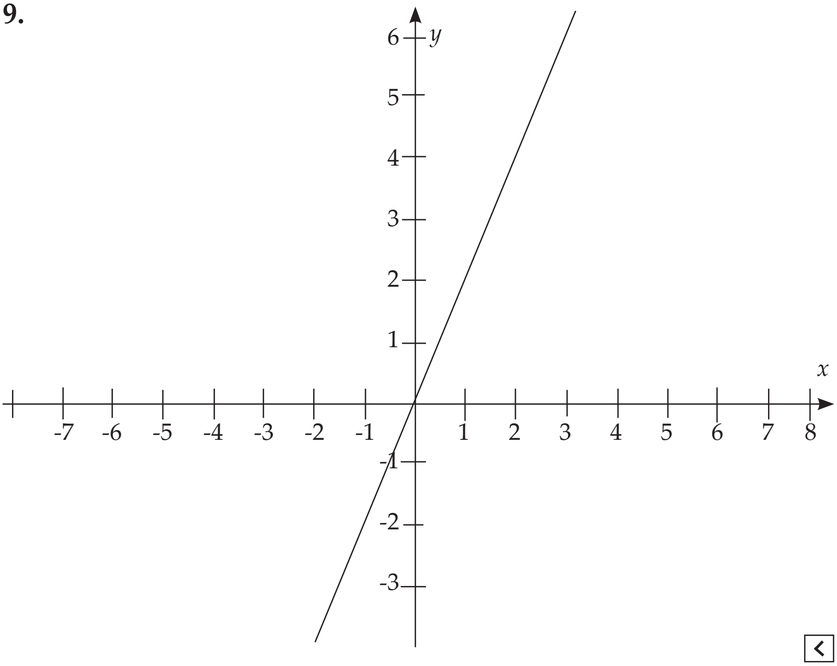


8.



y
x
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8

9.



y
x
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8

Acertijos

1. Un alga duplica su área en un día y alcanza a cubrir el área de un lago en 120 días. ¿Ocho algas en cuántos días cubrirán el lago?

2. Una rima infantil dice:

   Al ir a San Dimas
   encontré a un señor con siete divas
   cada diva con siete sacos
   cada saco con siete gatos
   cada gato con siete mininos
   mininos, gatos, sacos y divas,
   ¿cuántos iban a san Dimas?

Si todo el grupo va a San Dimas, ¿cuántos van?

BIBLIOGRAFÍA

GOODMAN, Arthury & HIRSCH, Lewis (1996). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (1.ª Ed.). México: Prentice Hall.

LEHMANN, Charles (1973). *Álgebra*. México: Limusa.Wiley, S.A.

STEWART, James, REDLIN, Lothar & WATSON, Saleem (2001). *Precálculo* (3.ª Ed.). México: Thomson.

SWOKOWSKI, Earl (1988). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

VANCE, Elbridge (1978). *Álgebra y Trigonometría*. Bogotá: Fondo Educativo Interamericano.

WADE, Thomas & TAYLOR, Howard (1977). *Matemáticas fundamentales*. México: Limusa.

WANER, Stefan & COSTENOBLE, Steven (2002). *Cálculo aplicado* (2.ª Ed.). México: Thomson.

Esta obra, editada en Barranquilla
por Ediciones Uninorte, se terminó
de reimprimir en los talleres de Javegraf
en diciembre de 2010 y se compuso
en Palatino Linotype

Temas como Lógica, Sistemas numéricos, Funciones y Variación son tratados en este texto de una manera dinámica y creativa con el propósito de permitir a los estudiantes potenciar su pensamiento cuantitativo y la aplicación de éste a la vida real. Los talleres y problemas propuestos, así como la metodología que desarrolla , convierten este texto en una valiosa herramienta que acerca paulatinamente a los alumnos al conocimiento de los aspectos fundamentales de las matemáticas básicas.

UNIVERSIDAD DEL NORTE